UNIVERZITET «DŽEMAL BIJEDIĆ» U MOSTARU
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Predmet: Teorija konstrukcija 1
Predmetni nastavnik: emer. prof. dr. Ognjen Jokanović, dipl.inž.građ.
Predmetni asistent: viši asistent mr. Rašid Hadžović, dipl.inž.građ.

Nastavni plan i program:

- Statika konstrukcija. Proračunske šeme.
- Opterećenja konstrukcija. Oslonci ravanskih konstrukcija.
- Unutrašnje i vanjske sile. Povezanost između opterećenja, transverzalnih sila i momenata savijanja.
- Statička određenost sistema. Kinematička stabilnost nosača.
- Statički određeni sistemi.
- Puni nosači.Prosta greda. Konzola. Grede sa prepustom.
- Uticajne linije za sve pune nosače. Statički i kinematički načini rješavanja uticajnih linija.
- Gerberove grede. Uticajne linije kod Gerberovih greda.
- Luk sa tri zgloba. Uticajne linije lukova sa tri zgloba.
- Rešetkasti nosači. Uticajne linije rešetkastih nosača.
- Virtuelna pomjeranja. Virtuelni rad.
- Energetske teoreme.

Literatura: Statika konstrukcija I (1. i 2. dio), Ing. Đorđe Solovjev,

Uslov izlaska na ispit: Tačno urađeni i predati programski zadaci. Potpis predmetnog nastavnika.
Pored programskih zadataka, svaki student je u obavezi da uradi 4 zadatka iz izučavanih oblasti, koje će zadati asistent i koje će prezentirati ostalim kolegama u sklopu vježbi. Zadaci će biti ocjenjivani i ocjena će imati uticaj na ocjenu iz pismenog dijela ispita, tako da student može na osnovu tih zadataka da dobije od -5 (minus 5 = ako ne bude uradio nijedan od datih zadataka ili ih loše prezentirao) do +5 bodova(plus 5=ako svi zadaci budu urađeni i prezentirani valjano).
Tokom godine studenti su obavezni da aktivno učestvuju u nastavi, da postavljaju pitanja, kao i da odgovaraju na postavljena pitanja. Zalaganje u nastavi će također biti ocjenjeno i imaće uticaj na ocjenu iz pismenog dijela ispita do ±5 bodova. Svi odgovori pozitivni i negativni će biti evidentirani, te će se na osnovu istih dati zasluženi broj bodova.
Tokom godine će biti vođena evidencija o prisustvu studenata, tako da svaki student koji bude odsutan preko 30 % iz nastave neće imati pravo na potpis predmetnog nastavnika.

Način polaganja ispita: Pismeni i usmeni dio ispita.

Pismeni dio ispita se polaže integralno iz svih oblasti koje su izučavane tokom godine. Ispit se smatra položenim ako je student dobio 55 bodova i više.
Usmeni dio ispita se polaže nakon položenog pismenog dijela. Vrijeme polaganja usmenog dijela ispita se se dogovara sa nastavnim profesorom.

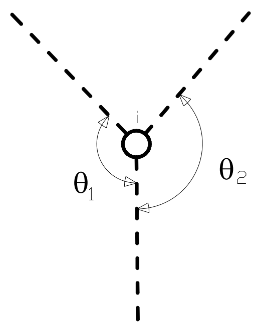
Ostalo: U sklopu vježbi studenti će ići sa predmetnim nastavnikom u obilazak građevinskih objekata u izgradnji i diskutovati o istim, razmatrati statičke šeme i opterećenja na konstrukcije, razgovarati o problemima građenja konstrukcija i rješenjima istih.

UVOD

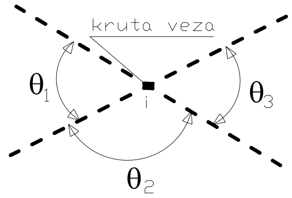
Skup tačaka međusobno povezanih u jednu cjelinu zovemo **nosač.** Zadatak nosača je da obezbijedi nepomjerljivost izvjesnih tačaka međusobno i u odnosu na stalne tačke u prostoru. To se najčešće postiže pravilnim komponovanjem više linijskih nosača koji svaki za sebe ima ograničenu ulogu da samo obezbijedi stabilnost u svojoj ravni, a svi zajedno obezbjeđuju prostornu stabilnost. Nosači koji obezbjeđuju samo nepomjerljivost u svojoj ravni zovemo **ravnim linijskim nosačima**, dok nosači koji onemogućvaju nepomjerljivost u prostoru zovemo **prostornim linijskim nosačima.**

Elementi nosača su:
1) Štapovi
2) Kruti uglovi
3) Oslonci

Štapovi su prave ili krive linije koje se nalaze u geometrijskim mjestima težišta poprečnih presjeka nekog nosača. Ukoliko su dimenzije poprečnih presjeka male u odnosu na dužinu štapova, tako da štap može da primi samo aksijalno opterećenje, zovemo ga **prostim štapom.** Ako poprečni presjek ima dimenziju da može da primi i druga opterećenja pored aksijalnih zovemo ga **greda.**
Štapovi mogu biti spojeni zglobno ili kruto.



Zglobna veza

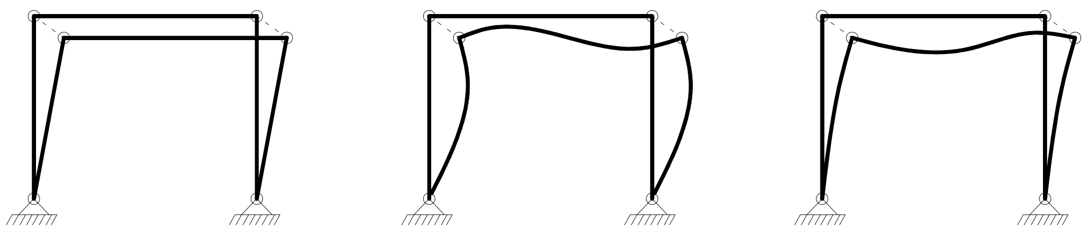


Kruta veza

Čvor je tačka u kome se spajaju 2 ili više štapova ili je to slobodan ilil oslonjen kraj štapa. Sa brojem čvorova raste i broj štapova i krutih uglova i zbog toga proračun i brojanje elemenata se otežava, a nama je cilj da to brojanje smanjimo i na taj način da smanjimo sebi proračun. Strukturno linijske nosače dijelimo na **rešetkaste i pune nosače.**
Rešetkasti linjski nosač sastoji se samo od prostih štapova i oslonaca.
Puni nosač je nosač sastavljen od štapova greda i prostih štapova i oslonaca sa ili bez krutih uglova.

KINEMATIČKA STABILNOST NOSAČA

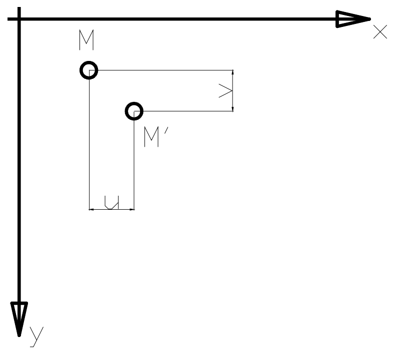
Da bi sistem štapova činio nosač potrebno je da se čvorovi ne pomjeraju bez deformacija štapova pomjeranja oslonaca i okretanja uklještenja. Za takav sistem štapova kažemo da je **kinematički stabilan.** U suprotnom sistem je **kinematički labilan.**



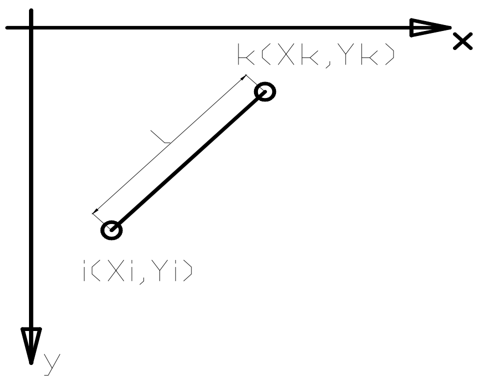
Labilan **Stabilan**

POTREBNI USLOVI ZA KINEMATIČKU STABILNOST

Svaka tačka m u ravni sa koordinatama x,y ima **2 stepena slobode (u,v) pomjeranja**. Prema tome **k – tačaka** ima **2k stepeni slobode pomjeranja**.



Svaki element nosača ukida jednu slobodu pomjeranja. Npr. Za tačke **i** i **k** koja svaka posebno ima po 2 stepena slobode pomjeranja, a objе povezane jednim istim štapom imaju samo 3 stepena slobode pomjeranja. Znači štap **ik** je smanjio jedan stepen slobode pomjeranja. Znači da **Zs štapova** ukida **Zs stepeni slobode pomjeranja.**

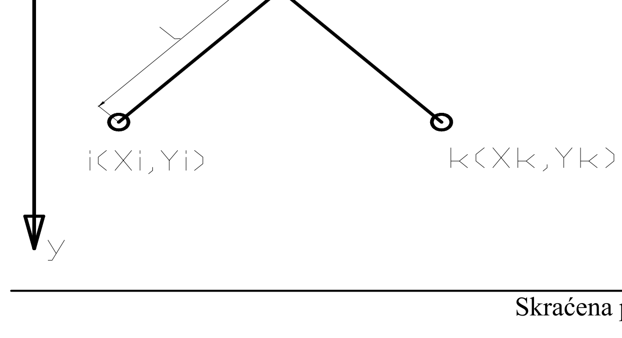


$2 \times 2 = 4$

<u>1 štap</u>

$4 - 1 = 3$ stepena slobode pomjeranja

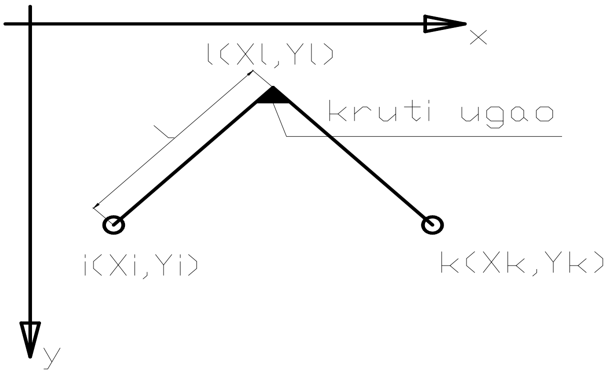
Ako imamo 2 štapa i 3 tačke u ravni onda je:



$3 \times 2 = 6$

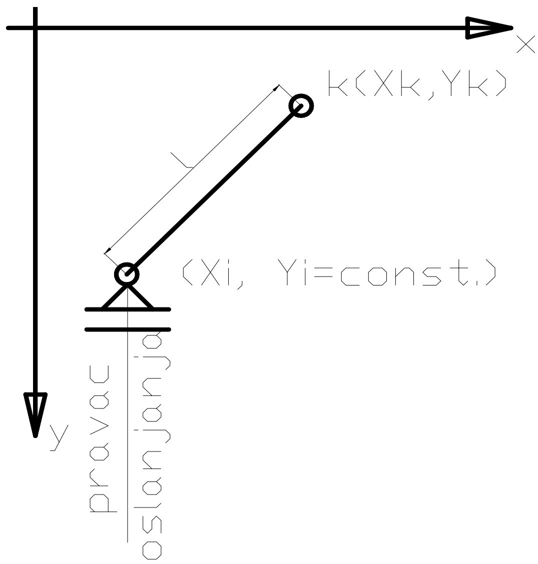
<u>2 štapa</u>

$6 - 2 = 4$ stepena slobode pomjeranja



Ako između dva štapa postavimo kruti ugao u čvoru **l** dobivamo krutu ploču od štapova **il** i **lk** i dobivamo 3 stepena slobode pomjeranja. Znači da **Zk krutih uglova** ukida **Zk stepeni slobode pomjeranja.**

Ako sada oslonimo neki štap **ik** na pokretni oslonac (tj. pravac oslanjanja je paralelan sa y-osom, pa je prema tome $\mathbf{y_i = const.}$, dok $\mathbf{x_i}$ **,** $\mathbf{x_k}$ **,** $\mathbf{y_k}$ nisu međusobno nezavisne već moraju da zadovolje uslov nepomjerljivosti dužine $\mathbf{l_{ik}}$ – udaljenost tačaka **i** i **k**), stoga tačke **i** i **k** pri ovakvoj vezi i oslanjanju imaju 2 stepena slobode pomjeranja. Znači da je oslonac ukinuo jedan stepen slobode pomjeranja. Prema tome Zo oslonaca ukida Zo stepeni slobode pomjeranja čvorova.



Time je pokazano da svaki element nosača ukida po jedan stepen slobode pomjeranja. Svi elementi nosača ukidaju ukupno

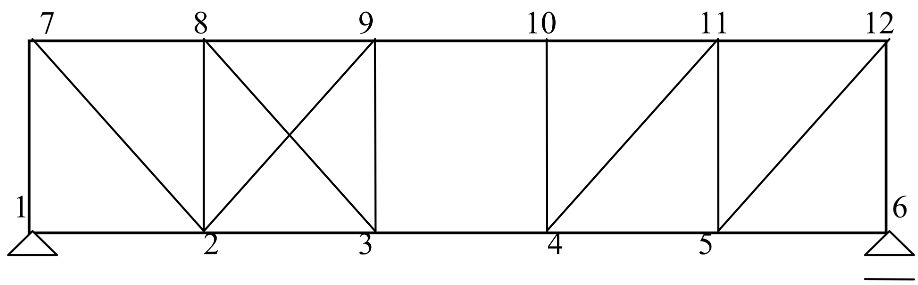
Zs + Zk + Zo – stepeni slobode pomjeranja

Zs + Zk + Zo = 2k ; ako nosač zadovoljava ovu jednačinu kažemo da je **prosto kinematički stabilan.**

Za nosače kod kojih je:
Zs + Zk + Zo > 2k kažemo da su **višestruko kinematički stabilni,**
A kod kojih je:
n = Zs + Zk + Zo - 2k > 0 kažemo da su **labilni.**
Ovdje je n – broj suvišnih elemenata za prostu kinematsku stabilnost.

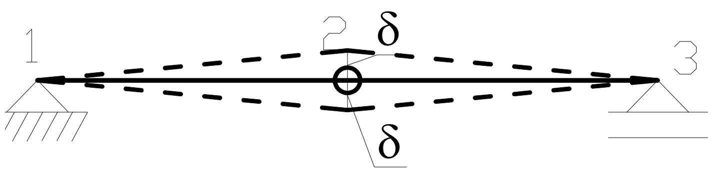
Pri definisanju nosača moramo paziti i na pravilan raspored elemenata.

Primjer 1:



k = 12
Zs = 21
Zk = 0
<u>Zo = 3</u>
ΣZ = 24 = 2k

Nepravilan raspored elemenata nosača dovodi do toga da je ovaj sistem **labilan**.
1-3-7-9 dio prestavlja krutu ploču koja je vezana štapovima 3-4- i 9-10 za drugu krutu ploču 4-6-10-12. Iz kinematike je poznato da je četverougao zglobno vezanih štapova predstavlja labilnu figuru, a to je slučaj na čvorovima 3-4-9-10.



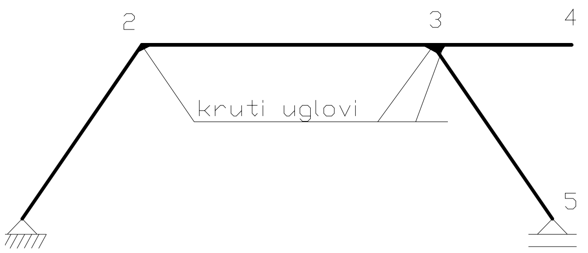
Primjer 2:
k = 3
Zs = 2
Zk = 0
<u>Zo = 4</u>
ΣZ = 6 = 2k

Sistem je u kritičnoj konfiguraciji zbog toga što i najmanje opterećenje izaziva znatne deformacije koje nisu zanemarljive u odnosu na deformaciju štapa.

UNUTRAŠNJA KINEMATIČKA STABILNOST

Za **štapove i krute uglove** kažemo da su **unutrašnji elementi nosača**, jer sprečavaju relativno pomjeranje čvorova.
Za takve nosače kod kojih unutrašnji elementi sprečavaju relativno pomjeranje čvorova kažemo da su unutrašnje stabilni i da čine jednu **krutu ploču.**
Kako jedna kruta ploča ima 3 stepena slobode pomjeranja u ravni broj unutrašnjih elemenata nosača za prostu kinematičku stabilnost treba da je:

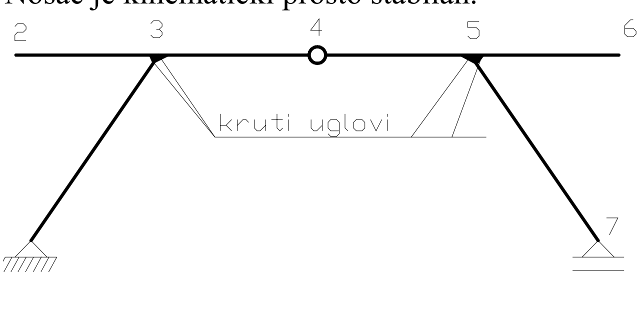
$$Zs + Zk \geq 2k - 3$$



PRAVILAN RASPORED ELEMENATA NOSAČA

k = 5
Zs = 4
Zk = 3
Zs + Zk = 7= 2 × k - 3
Zs + Zk = 7= 2 × 5- 3
7 = 7

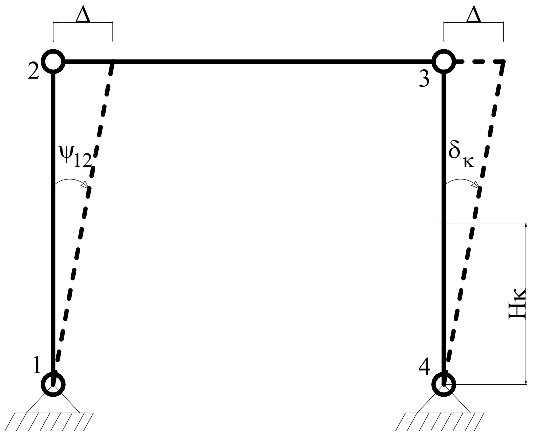
Nosač je kinematički prosto stabilan.



k = 7
Zs = 6
Zk = 4
Zs + Zk = 10= 2 × k - 3
Zs + Zk = 10= 2 × 7- 3
10 < 11
Sistem je unutrašnje kinematički labilan.

PRINUDNI MEHANIZAM ILI KINEMATIČKI LANAC

Prinudni mehanizam ili kinematički lanac je sistem međusobno vezanih ploča i štapova koji imaju jedan stepen slobode pomjeranja. Kod njih su putanje kretanja svih tačaka potpuno određene kada je zadan ili usvojen jedan parametar pomjeranja. Generalisano pomjeranje



$$\delta = \Delta \times \delta^{(1)}$$

$\delta^{(1)}$ – pomjeranje δ za stanje $\Delta = 1$.

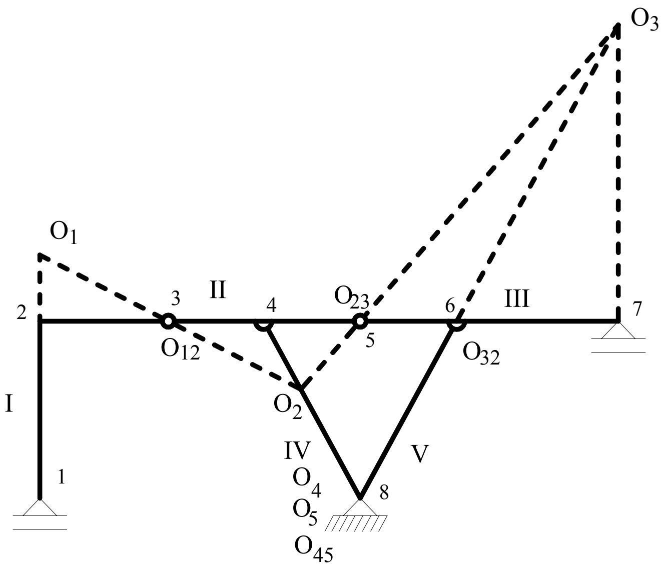
$$\psi_{12} = \frac{1}{h}\Delta \text{ , jer je } \psi_{12}^{(1)} = \frac{1}{h}$$

$$\delta_k = \frac{h_k}{h}\Delta \qquad (\delta_k^{(1)} = \frac{h_k}{h})$$

Dovoljno je poznavati pravce pomjeranja samo 2 tačke jedne ploče, pa da znamo položaj pola iste (u presjeku normalana vektore pomjeranja tih dviju tačaka). Kod *prinudnih mehanizama* položaj polova i međupolova se predstavlja sa tzv. planom polova i međupolova (pol – centar rotacije).

Kod mehanizama sa 2 ili više stepeni slobode nema plana polova, jer su putanje tačaka zavisne od 2 i više nezavisnih parametara.

Primjer 3: Prinudni mehanizam 5 ploča.



Zs + Zk + Zo < 2k ;
2k – (Zs + Zk + Zo) = 1

k = 8 ; Zs = 8; Zk = 3; Zo = 4;
Zs + Zk + Zo = 15
Ovim su zadovoljeni uslovi potrebni za prinudni mehanizam.

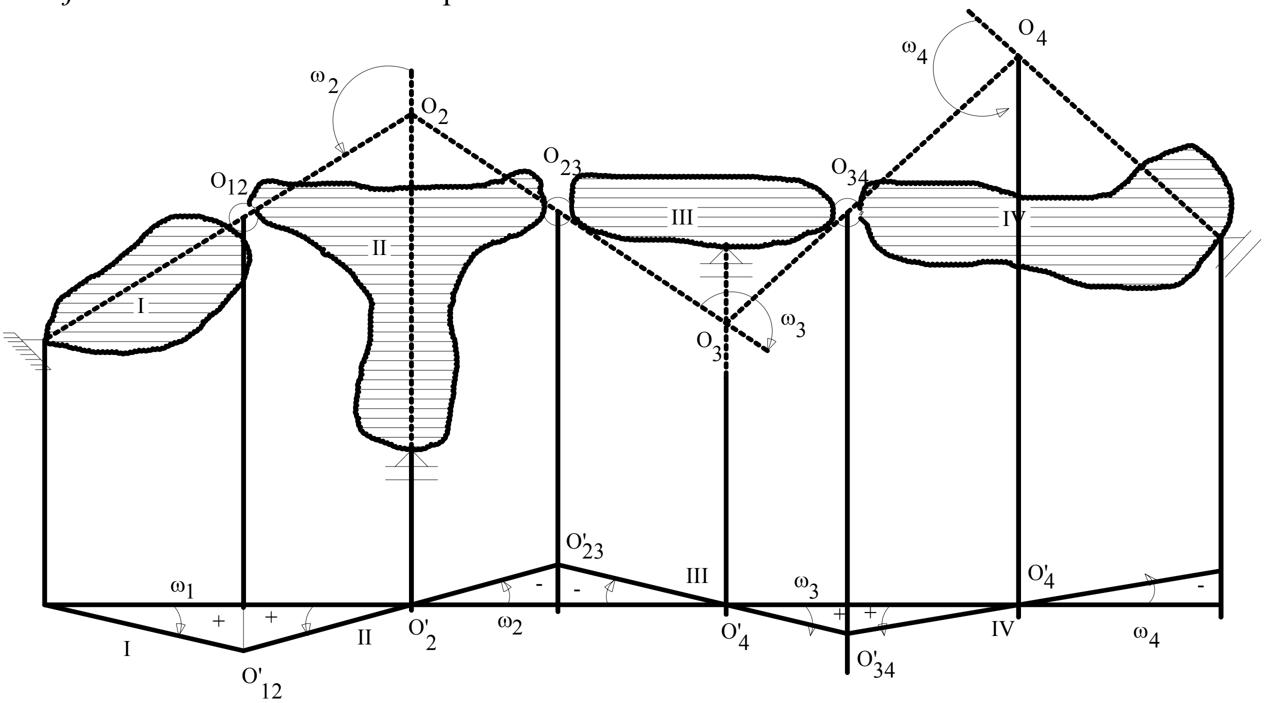
Spoljne i unutrašnje veze definišu u potpunosti apsolutni pol O_4 i O_5 i međupoove O_{45} , O_{12} , O_{23} , O_{35} , a djelimično i apsolutne poove O_1 i O_3 koji moraju biti u pravcima oslanjanja oslonaca 1 i 7.

Kako dva apsolutna pola i njihov međupol moraju biti na istom pravcu to se apsolutni pol O_3 nalazi i na pravcu O_5 – O_{35} , a time je definisan položaj istog u presjeku O_5 – O_{35} i pravcaoslanjanja ploče III u osloncu 7. Kako su i 2 pola O_3 i O_2 i njihov međupol O_{23} moraju nalaziti na istom pravcu, a također i poovi O_4 i O_2 i njihov međupol O_{24} , to je položaj pola O_2

dobiven u presjeku pravaca $O_3 - O_{23}$ i $O_4 - O_{24}$. Analogno određivanju pola O_3 pol O_1 dobiven je presjekom pravaca $O_2 - O_{12}$ i pravca oslanjanja ploče I u osloncu 1.

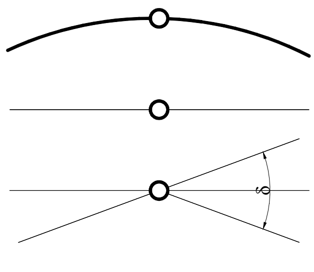
Dijagram pomjeranja

Primjer 4: Prinudni mehanizam 4 ploče.

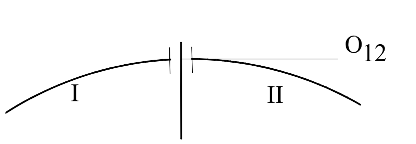


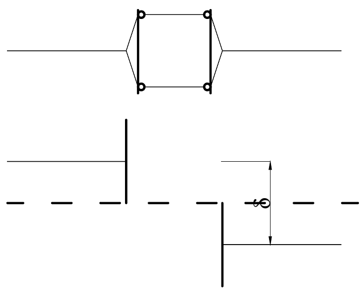
ZGLOBOVI

a) **MOMENTNI ZGLOB** je zglobna veza dvaju krutih ploča. Kod ovog zgloba ploča I relativno rotira u odnosu na nepokretnu ploču II oko međupola koji se nalazi u zglobu (i obratno). Ova veza onemogućuje relativno pomjeranje krajeva ploče, ali omogućuje njihovo rotiranje.

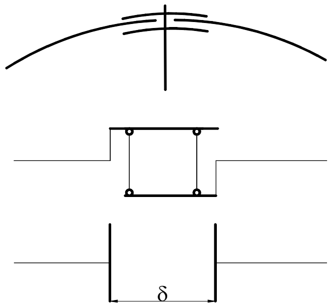


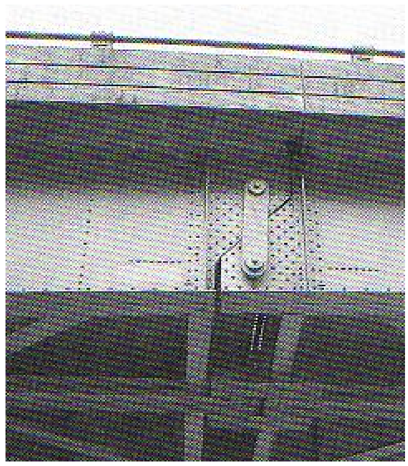
b) **POPREČNI ZGLOB** je veza dvaju krutih ploča I i II koja onemogućuje osovinsko razmicanje i relativno rotaciju dodirnih presjeka, a omogućuje poprečno (transverzalno) pomjeranje. Međupol O_{12} se nalazi u beskonačnosti, a zglob je zamišljen kao veza dva beskonačno mala paralelna štapa zglobno vezanaza dodirne presjeke, a takođe i generalisano linijsko pomjeranje.





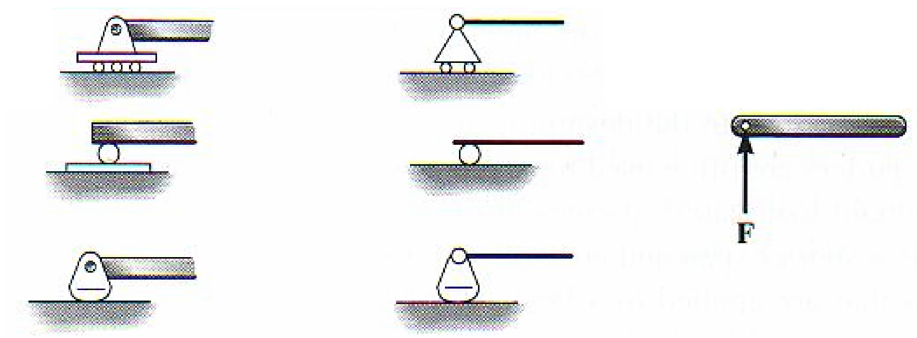
c) **PODUŽNI ZGLOB** je veza između ploča I i II koja onemogućuje relativnu rotaciju i poprečno razmicanje dodirnih presjeka, a omogućuje podužno relativno pomjeranje istih. Međupol O_{12} nalazi se u beskonačnosti na pravcu dodirnih presjeka. Zamišljen je kao veza dva beskonačno mala paralelna štapa u pravcu poprečnih dodirnih presjeka.

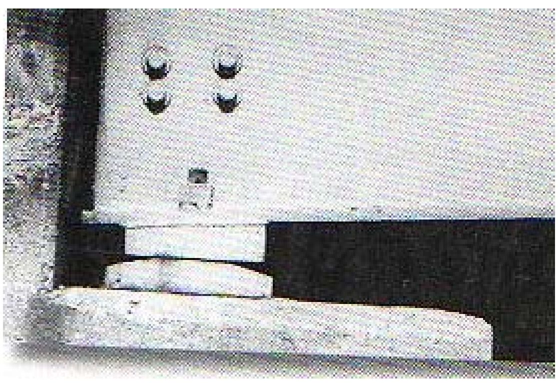


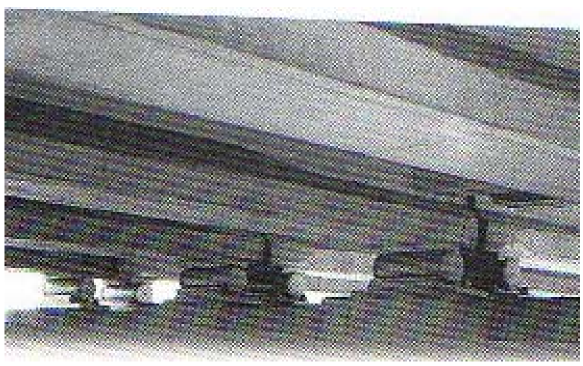


OSLONCI

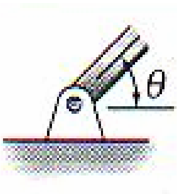
a) **POKRETNI OSLONAC** je spoljna veza koja sprečava pomjeranje tačke oslanjanja, dok joj dopušta pomjeranje upravno na pravac oslanjanja, a i rotaciju oslonjenog presjeka. To određuje položaj apsolutnog pola oslonjene ploče I koji se nalazi na pravcu oslanjanja.

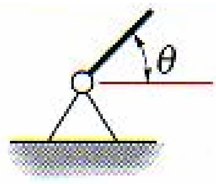


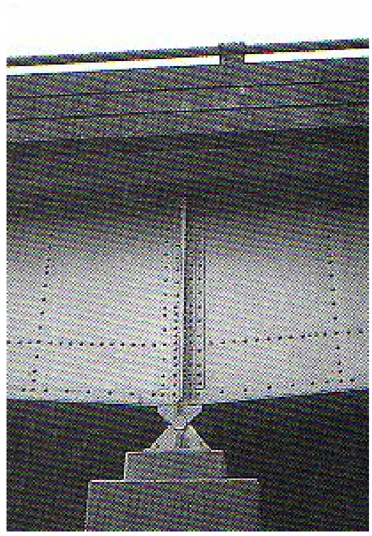


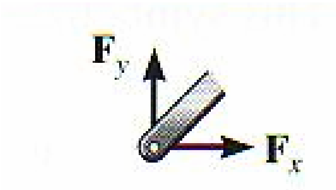


b) **NEPOKRETNI OSLONAC** je oslonac koji sprečava svako linearno pomjeranje oslonjene tačke, a omogućuje rotaciju iste. To definiše položaj apsolutnog pola oslonjene ploče I koji mora biti u oslonjenoj tački A.

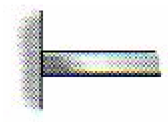


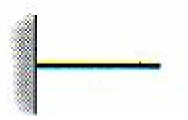


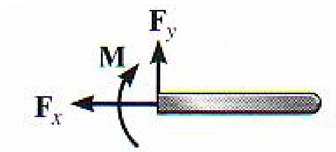




c) **UKLJEŠTENJE** kao oslonac onemogućuje svako pomjeranje oslonjene tačke, kao i rotaciju odgovarajućeg poprečnog presjeka.







VANJSKE I UNUTRAŠNJE SILE

Vanjske sile mogu biti:

a) Aktivne, koje su izazvane vanjskim faktorima, bilo dodirom bilo djelovanjem na odstojanju (npr. gravitaciona sila).

b) Reaktivne, koje su izazvane aktivnim silama i predstavljaju otpore od oslonaca i uklještenja.

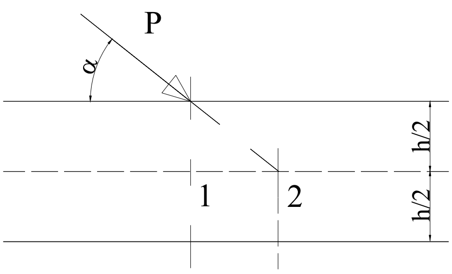
Opterećenja na konstrukciju mogu biti:

- koncentrisana (dimenzije t, kg, kN, tj. dimenzije sila)
- raspodjeljena duž osovine štapa (dimenzije t/m, kg/m, kN/m, tj. dimenzije sila/dužina)

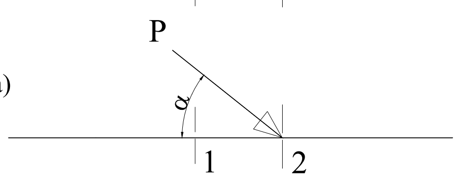
U prirodi ne postoje linijska opterećenja već samo površinska (dimenzije sila/površina) i zapreminska (dimenzije sila/zapremina).

Postoje još i:

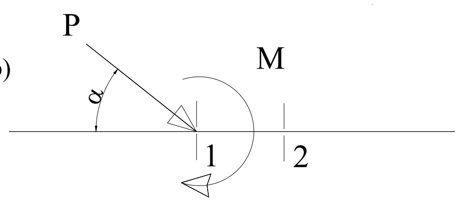
- koncentrisani spregovi – momenti (dimenzije tm, kgm, kNm, tj. dimenzija sila × dužina)
- raspodjeljeni spregovi – momenti (dimenzija sila × dužina/dužina)



a)

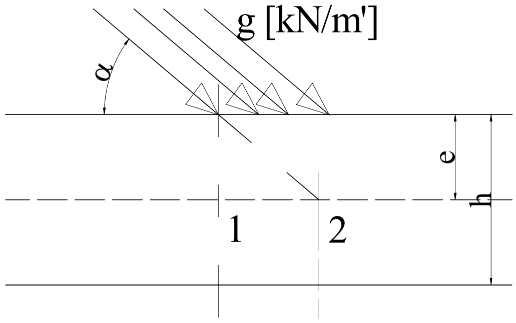


b)



Ako koncentrisana sila djeluje u presjeku 1 pod nekim uglom α, ona ustvari ne djeluje u presjeku 1 osovine nosača nego u presjeku 2 na udaljenosti h/2ctgα. Idealizujući nosač njegovom osovinom prinuđeni smo da ili to imamo u vidu ili da djeluje u presjeku 1, ali da dodamo i spreg M.

$$M = \frac{Ph}{2} \cdot \sin\alpha \cdot ctg\alpha = \frac{Ph}{2} \cdot \cos\alpha$$

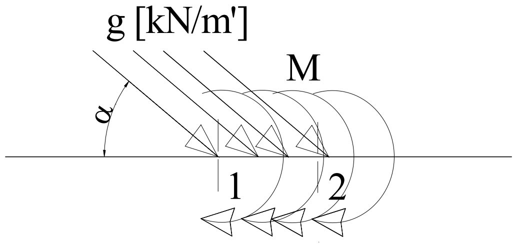


Slično tome i raspodjeljeno opterećenje pod nagibom daje pri redukciji na osovinu nosača dopunske raspodjeljene spregove intenziteta

$$m = g \times e \times \cos\alpha$$

Po dužini djelovanja opterećenja mogu biti:

- stalna: sopstvena težina nosača i elementi konstrukcije koji funkcionalno moraju stalno biti prisutni, te snijeg u područjima gdje se pojavljuje,
- povremena (korisno opterećenje): vjetar, ljudi, vozila, teret u skladištima, zemljotres itd.



Prema načinu djelovanja dijelimo ih na:

- nepokretna i
- pokretna

također i na:

- direktna i
- indirektna.

Računska opterećenja određuju se na bazi stvarnih podataka o nosaču, stalnom opterećenju i funkciji nosača, kao i na osnovu važećih propisa za određene vrste konstrukcija. Taj dio statičkog proračuna koji prethodi samom iznalaženju sile u poprečnim presjecima nosača zovemo **ANALIZOM OPTEREĆENJA.**
Prema propisima opterećenja se mogu dijeliti i prema vrstama objekata:

- opterećenje zgrada,
- opterećenje drumskih mostova,
- opterećenje željezničkih mostova itd.

Ili prema značaju i učestalosti na:

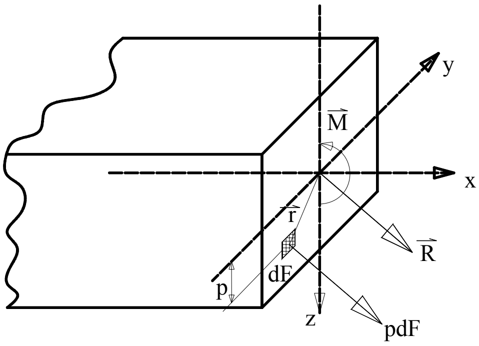
- glavna,
- dopunska,
- naročita,

a prema uticaju na stvarno stanje napona uslijed eventualnih vibracija dijelimo ih na:

- statička i
- dinamička.

UNUTRAŠNJE SILE

Dejstvo vanjskih sila na nosač izaziva deformaciju istog i pojavu unutrašnjih sila u presjecima kao rezultante napona.
U otpornosti materijala se govori o naponima, ali moramo naglasiti da se ne može govoriti o naponima, ako nije tačno definisana ravan (zamišljen presjek nosača) i tačka u toj ravni. Najčešće se govori o naponima u tačkama presjeka upravnog na osovinu nosača na određenom mjestu osovine, ali ne mora uvijek biti tretiranje napona u presjecima upravnim na osovinu već i presjecima pod određenim uglom različitim od 90°. U statici linijskih nosača smatramo da su opterećenja i osa nosača u istoj ravni. Ako tretiramo unutrašnje sile u nekom presjeku nosača, izrazićemo ih preko napona u presjeku upravnom na osovinu, pa će i naponi biti u ravni nosača.



$$\vec{R} = \int_F \vec{p}\, dF \qquad (1)$$

$$\vec{M} = \int_F \vec{p}\,\vec{r}\, dF \qquad (2)$$

Presječna sila R i moment poslije redukcije sile R na težište presjeka izraženi su preko napona formulama (1) i (2).

Sile u presjeku preko komponenata su:

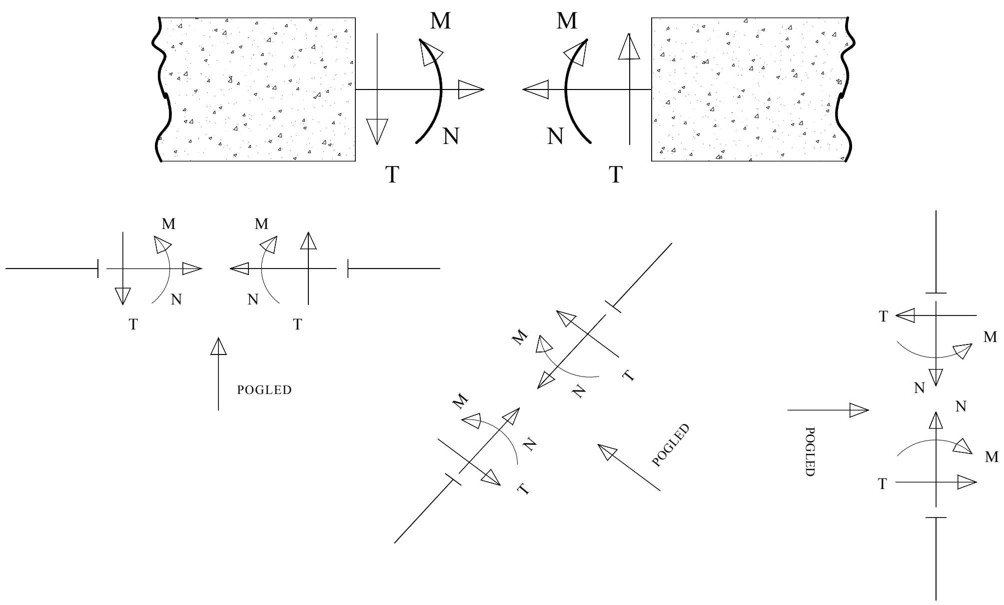
$$N = \int_F \sigma_x \, dF$$

$$T = \int_F \tau_{xz} \, dF$$

$$M = \int_F \sigma_{xz} \, dF$$

Smatramo da nema torzionog momenta M_x i momenta oko ose z, M_z.

Šematski prikazano:



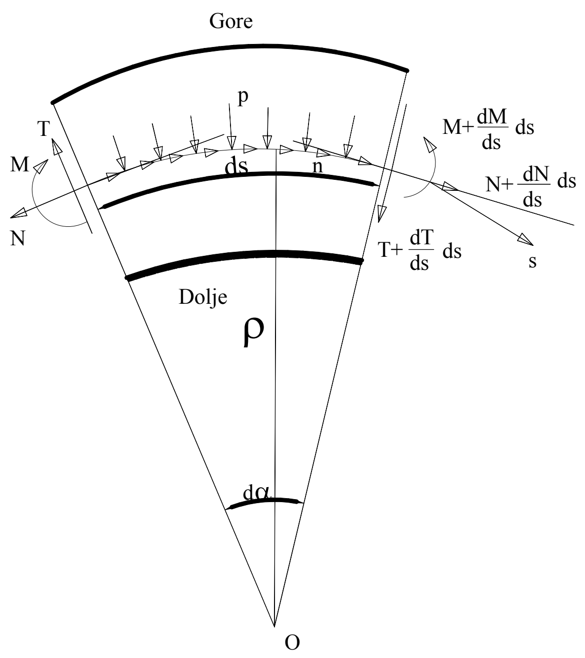
N – normalna sila – komponenta rezultante unutrašnje sile R u pravcu x – ose (na osovini nosača). Pozitivna je kada zateže svoj dio štapa.

T – transverzalna sila – komponenta rezultante unutrašnje sile R u pravcu z – ose (normalna na osovinu nosača). Pozitivna je kada ima tendenciju da obrće dio štapa oko drugog kraja u smjeru kazaljke na satu.

M – momenat savijanja oko *ose y*, M_y. Pozitivan je kada izaziva zatezanje donje strane nosača.

POVEZANOST IZMEĐU OPTEREĆENJA, TRANSVERZALNIH SILA I MOMENATA SAVIJANJA

Ako iz nekog štapa uzmemo dio i na poprečnim presjecimasa strane odredimo pozitivan pravac za unutrašnje sile.



Na lijevom dijelu presjeka djeluju M, N i T sile, a sa desne $M+\frac{dM}{ds}, N+\frac{dN}{ds}, T+\frac{dT}{ds}$ sa već zadanim pravcima i smjerovima. Sada moramo da napravimo jednačinu ravnoteže prema tangenti u sredini kose ose, s tim da se veličine drugog stepena zanemaruju.

ρ – poluprečnik kose ose

O – centar poluprečnika ρ; ako je sa donje strane onda je pozitivan, u suprotnom je negativan,

p=q – kontinuirano optećenje koje djeluje okomito na na kosu osu elementa; ako djeluje odozgo nadolje, onda je pozitivan, u suprotnom je negativan,

n – kontinuirano opterećenje koje djeluje u pravcu kose ose elementa, ako djeluje s lijeva na desno, onda je pozitivno, u suprotnom je negativno,

dα - ugao koji zaklapaju stranice isječenog elementa.

$$-N\cdot\cos\frac{d\alpha}{2}+\left(N+\frac{dN}{ds}ds\right)\cdot\cos\frac{d\alpha}{2}-T\cdot\sin\frac{d\alpha}{2}-\left(T+\frac{dT}{ds}ds\right)\cdot\sin\frac{d\alpha}{2}+n\cdot ds=0$$

$$ds=\rho\cdot d\alpha \qquad \cos\frac{d\alpha}{2}\approx 1, \qquad \sin\frac{d\alpha}{2}\approx\frac{d\alpha}{2}$$

$$\frac{dN}{ds}\cdot ds-2T\frac{ds}{2\rho}+n\cdot ds=0,$$

$$\frac{dN}{ds}-\frac{T}{\rho}+n=0$$

Ako na isti način postavimo jednačinu ravnoteže prema normali na kosu osu elementa onda dobivamo sljedeću jednačinu:

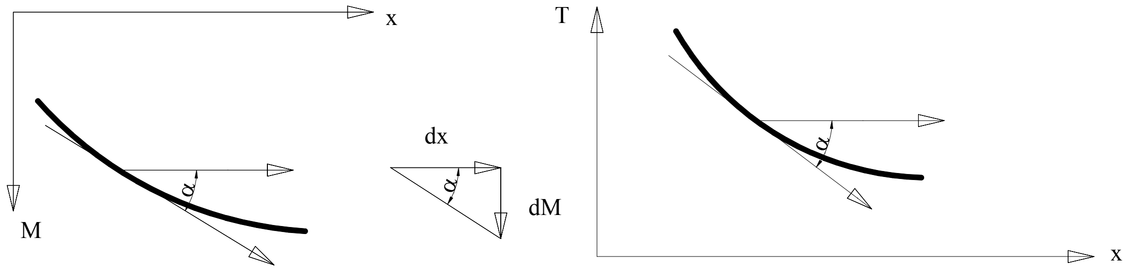
$$p+\frac{dT}{ds}+\frac{N}{\rho}=0$$

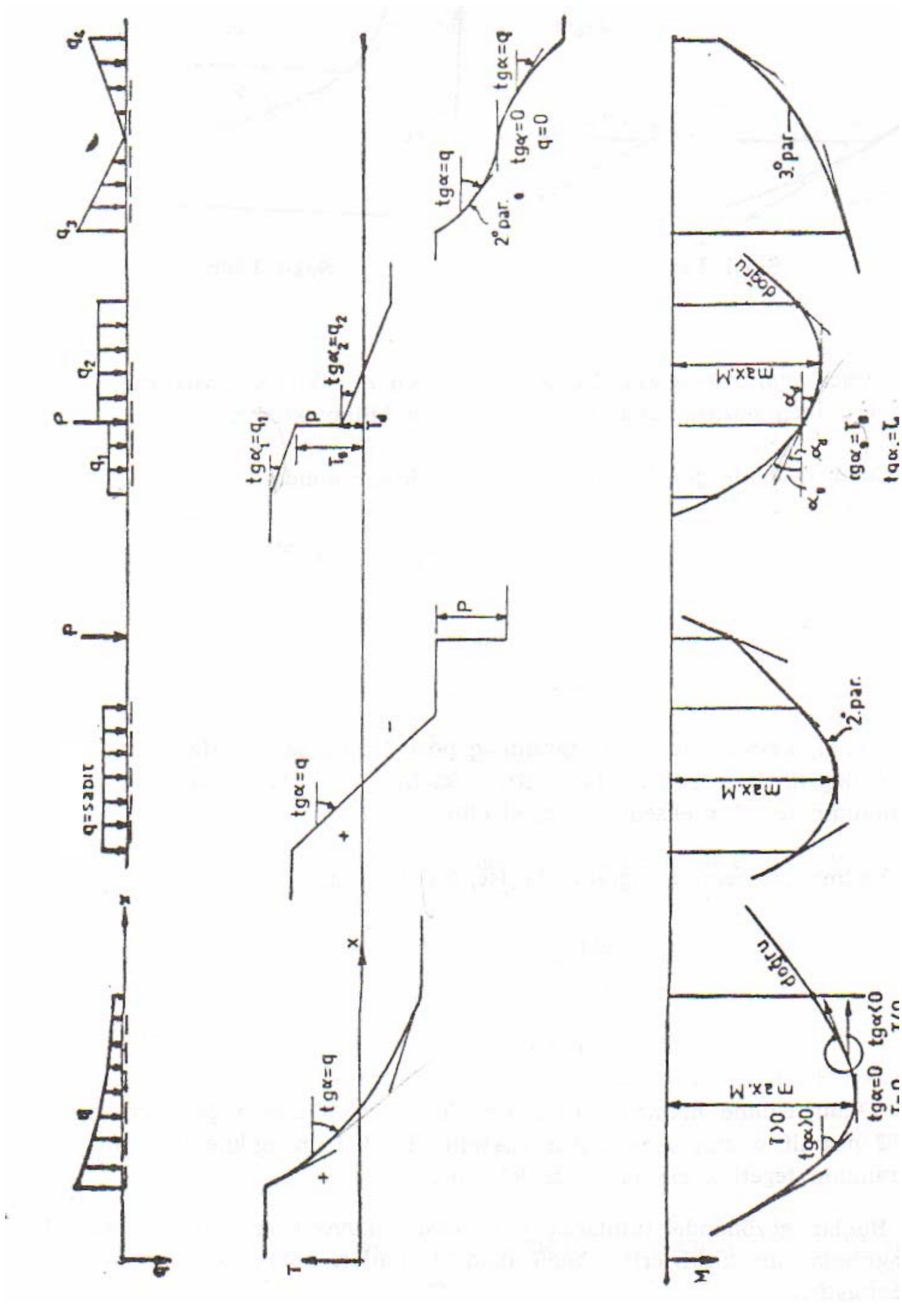
te moment iz jednačine ravnoteže:

$$\frac{dM}{ds}-T=0$$

Ako je ρ beskonačno dug i ako u gornje jednačine umjesto *ds* stavimo *dx* onda ćemo dobiti sljedeće jednačine:

$$\frac{dN}{dx} = -n, \qquad \frac{dT}{dx} = -p, \qquad \frac{dM}{dx} = T, \text{ te je } \qquad \frac{d^2M}{dx^2} = -p$$





UTICAJNE LINIJE

Općenito o uticajnim linijama

Pri statičkom ispitivanju jedne konstrukcije određuju se izvjesni uticaji, koje vanjsko opterećenje ili izvjesna sredina vrši na konstrukciju.
Pod tim uticajima podrazumijevamo: reakcije oslonaca, horizontalni potisak luka ili lančanog nosača, napadne momente, transverzalne i normalne sile u jednom presjeku, ugibanje pojedinih tačaka konstrukcije i dr. Sve ove veličine koje mi ispitujemo, zovemo **uticaji** i obilježavamo ih sa **Z**.
U slučaju nepokretnih opterećenja uticaje u nosaču tj. u nekom određenom presjeku, možemo odrediti pomoću već poznatih metoda statičkog proračuna. Na osnovu dobiveih vrijednosti unutrašnjih sila možemo naći ekstremne veličine momenata i transverzalnih sila. Ali ako na nosča djeluje pokretno opterećenje, onda se u nosaču ekstremne vrijednosti unutrašnjih sila pojavljaju u različitim presjecima nosača u zavisnosti od kretanja sile.
Da bi lakše odredili vrijednosti uticaja od pokretnog opterećenja koristimo se koncentrisanom jediničnom silom od 1kN koja se kreće po nosaču s lijeva na desno ili obrnuto. Udaljenost te jedinične sile od jednog oslonca (npr. od oslonca A) se označava sa x, dok je ukupna dužina nosača L. Kretanje sile po nosaču izaziva uticaje u svim presjecima nosača, pa prema tome i za neki određeni presjek možemo da bez ikakvih problema odredimo vrijednosti unutrašnjih sila, odnosno da nacrtamo uticajnu liniju određenog presjeka na nosaču.
Znači, **uticajna linija** je linija čije ordinate, izmjerene ispod opterećenja, daju veličinu traženog uticaja od jedinične sile od 1 kN u presjeku, za koji je ta linija konstruisana. Površian koju zaklapa uticajna linija sa horizontalom zove se **uticajna površina.**

Osobine uticajnih linija

Traženi uticaj od opterećenja na nosaču dobije se pomoću superpozicije. Uticajne linije crtaju se samo za jedan određeni pravac opterećenja, a mi proučavamo uticajne linije od vertikalnog opterećenja.
Moramo razlikovati dijagrame unutrašnjih sila nosača od uticajnih linija, jer se dijagrami unutrašnjih sila crtaju za neko određeno opterećenje, dok se uticajne linije crtaju za neki određeni presjek.

Oblici uticajnih linija

Oblik uticajne linije zavisi od konstrukcije nosača i od načina opterećenja, pa prema tome taj oblik može biti pravolinijski, poligonalni ili krivolinijski. Kod svih statički određenih nosača uticajne linije su prave, dok su kod statički neodređenih nosača to krive linije drugog ili višeg stepena. Za slučaj direktnog opterećenja uticajne linije su prave, a za slučaj indirektnog opterećenja uticajne linije su poligonalne oblika. Ako se sila nalazi u čvoru onda se uticajna linija od indirektnog oslanjanja ne razlikuje od uticajne linije direktnog oslanjanja.

Konstruisanje uticajnih linija

Za konstrukciju uticajnih linija postoje dva načina:
- statički
- kinematički.

Statički način

Sila od 1 kN se postavi na nosač u nekom proizvoljnom položaju na odstojanju **x** od neke stacionarne tačke nosača (oslonac). Smatrajući opterećenje nepokretnim, određujemo tražene statičke veličine koje se izražavaju u vidu neke jednačine koja sadržava **x** koji je promjenljiva veličina. Ponekad je potrebno postavljati silu od 1kN na nekoliko različitih tačaka nosača i za svaki položaj pisati odgovarajuću jednačinu, jer uticajna linija može imati nekoliko dijelova, koji imaju različite jednačine. Pa prema tome, uticajna linija se ne može odrediti odjednom za cijeli nosač, već se mora ispitivati dio po dio nosača.

Kinematički način

Ovaj način se zasniva na principu virtualnih pomjeranja (*princip Lagrange-a*). Prema ovom principu *ako se neki materijalni sistem nalazi u ravnoteži pod uticajem sila koje na njega djeluju, onda zbir radova pri svakom virtualnom pomjeranju mora biti jednak nuli*.

Za primjenu ovog principa dati se sistm odbacivanjem izvjesnih veza pretvara u kinematički lanac (mehanizam) te se pomoću principa virtualnih pomjeranja dobije jednačina za traženi uticaj, a neposredno se dobije oblik uticajne linije.

Integracija uticajnih linija

Koncentrisane sile: $Z = P \times \eta$

P – zadata koncentrisana sila na nosaču

η – ordinata ispod koncentrisane sile P na uticajnoj liniji

Ravnomjerno kontinuirano opterećenje: $Z = q \times F$

q – vrijednost opterećenja

F – uticajna površina ispod opterećenja

Nejednako podjeljeno opterećenje (trouglasto ili trapezasto): $Z = q_t \times F$

q_t – vrijednost opterećenja u težištu uticajne površine ispod opterećenja

F – uticajna površina ispod opterećenja

Opterećenje spregom: $Z = M \times \mathrm{tg}\alpha$

M – vrijednost sprega (momenta)

α – ugao uticajne linije na mjestu na kome napada spreg.

Pošto je uticajna linija za reakciju proste grede prava linija, to znači da veličina reakcije od sprega ostaje konstantna ma gdje se nalazio spreg.

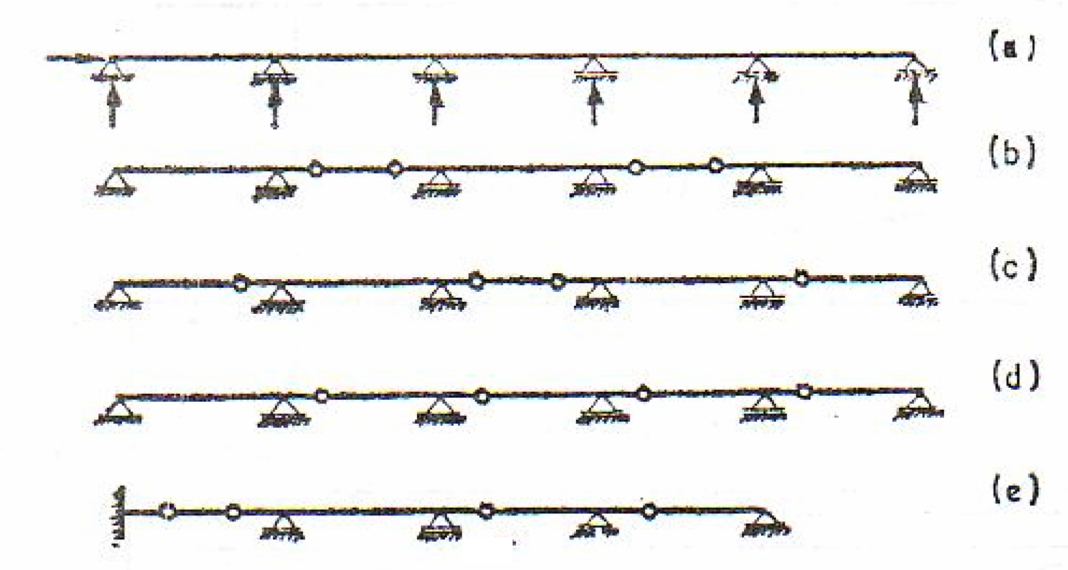
Uticaj je pozitivan, ako i spreg i nacrtana uticajna linija (bilo koja uticajna linija) okreću u istom smjeru, a negativan ako su im smjerovi okretanja različiti.

Granične vrijednosti uticaja

U zavisnosti od sistema uticajne linije mogu biti istog i različitog predznaka. Ako su uticajne površine različitog predznaka, mjesto na uticajnoj liniji gdje se mijenja predznak zove se **nulta tačka.** U zavisnosti od položaja opterećenja na nosaču, integracija uticajne linije se vrši tako da se opterećenje množi sa predznakom koji ima uticajna površina.

GERBEROVE GREDE

Greda koja ima *n* oslonaca od kojih je jedan nepokretan, a ostali pokretni i koji su poredani u jednom pravcu međusobno povezani štapovima zove se **kontinuirana greda**. Svaka kontinuirana greda je *n-3* puta statički neodređena, zbog toga što ima viška reakcija u odnosu na tri uslova ravnoteže. Umetanjem *n-3* broja zglobova kod kojih je M=0, na kontinuirane grede, dobivaju se statički određeni nosači koji se zovu **Gerberove grede**, po njemačkom inženjeru Heinrich-u Gerber-u (1832.-1912.).



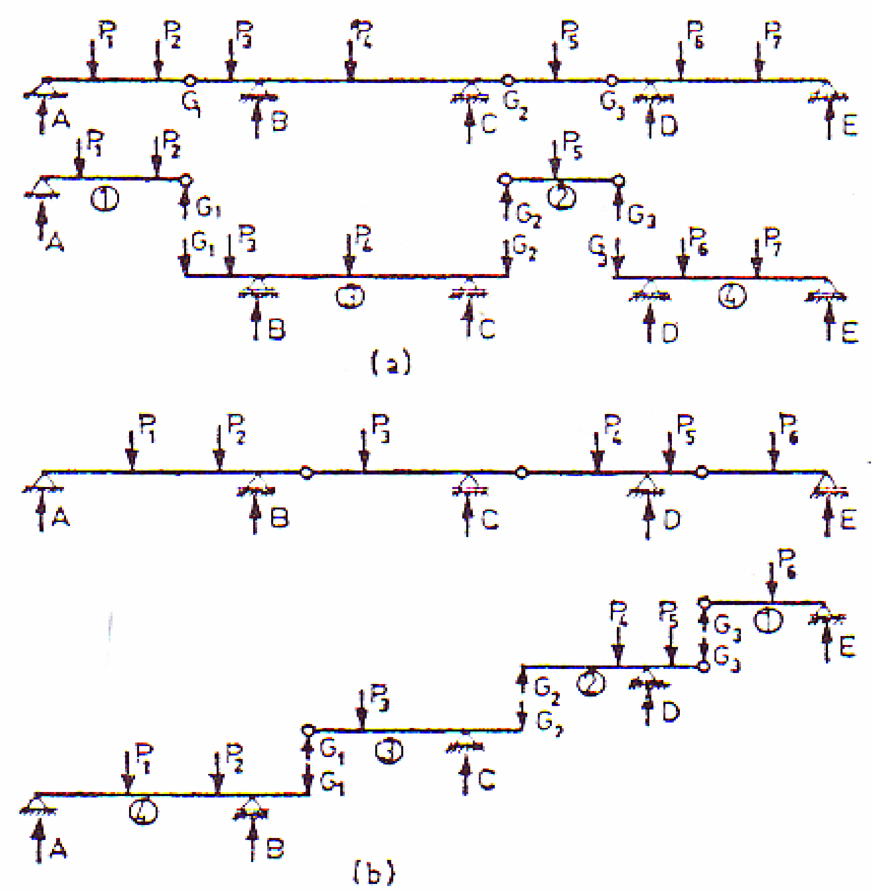
Slika 1: Šeme umetanja zglobova

Prema načinu postavljanja zglobova Gerberove grede se koriste u mostogradnji (b), (c) ili kod projektovanja rožnjača (d). Pod (e) je još jedan mogući slučaj Gerberove grede.

Prilikom umetanja zglobova potrebno je poznavati sljedeća pravila:

1) u jednom polju ne mogu se umetnuti više od dva zgloba,
2) u krajnjem polju ne smije postojati više od jednog zgloba i to ne računajući oslonački zglob,
3) ako u jednom polju postoje dva zgloba, u susjednim poljima smije biti umetnut jedan ili nijedan,
4) ako u krajnjem polju postoji jedan zglob, onda u sljedećem polju može biti umetnut samo jedan,
5) između dva zgloba mogu biti najviše dva oslonca.

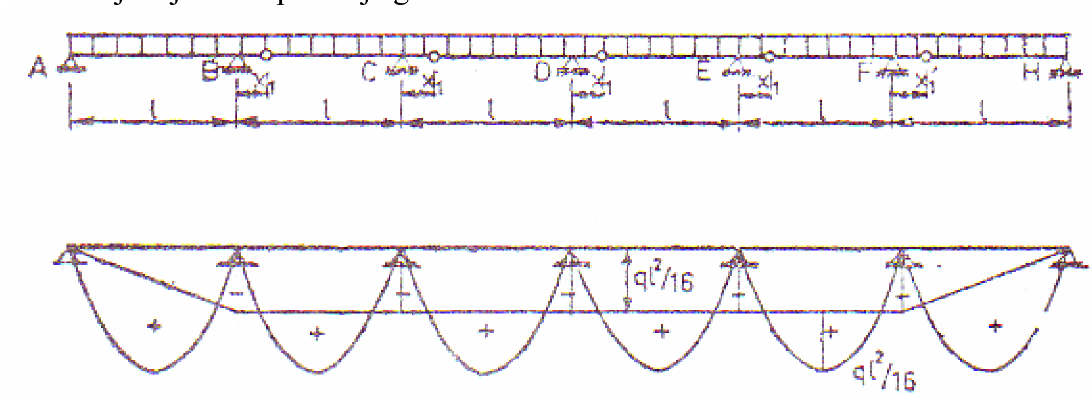
Poštujući pravila umetanja zglobova dobija se niz prostih greda i greda sa propustima. Na slici 2 može se vidjeti način rastavljanja nosača u zglobovima i na taj način dobija se **šema rastavljanja nosača**. Dijelovi grede koji imaju dva stvarna oslonca, odnosno oni dijelovi koji se mogu proračunati sami za sebe zovemo **primarnim nosačima**, a dijelovi nosača koji imaju jedan stvarni i jedan oslonac dobiven rastavljanjem nosača u zglobu ili dva oslonca dobivena rastavljanjem nosača u dva susjedna zgloba zovemo **sekundarnim nosačima**. Primarni dijelovi nosača idu „dolje“, a sekundarni „gore“. Prilikom rastavljanja nosača u zglobovima pojavljuju se dvije reakcije, vertikalna i horizontalna. U slučaju da na cijelom nosaču ne postoji horizontalno vanjsko optrećenje, onda će i horizontalne reakcije u zglobovima biti jednake nuli, u protivnom horizontalna reakcija će se pojaviti na mjestima gdje postoji vanjsko horizontalno opterećenje.



Slika 2: Način rastavljanja Gerberovih greda u zglobovima

DEFINISANJE MJESTA ZGLOBOVA

Kod određivanja mjesta zglobova pored već spomenutih pravila umetanja, moramo paziti i na tačnu udaljenost zgloba od oslonca. Da bi definisali tu udaljenost u razmatranje će biti uzeta jedna rožnjača nekog hangara kod koje su sve dužine među osloncima jednake, a maksimalni i minimalni momenti savijanja su isti i to $\frac{ql^2}{16}$ za slučaj stalnog opterećenja-kontinuirano opterećenje (snijeg, vlastita težina). Da bi postavili zglob na gredi, onda treba paziti gdje je momenat savijanja jednak nuli i jedino je tu moguće postaviti zglob, te je to mjesto najekonomičnije mjesto za položaj zgloba na nosaču.



Slika 3: Upoređenje dijagrama momenata savijanja proste grede i Gerberove grede

Najekonomičnija mjesta na nosaču su mjesta gdje se mijenja predznak momenta savijanja, a što se može vidjeti na slici 3. Prvo se nacrta dijagram momenata savijanja za svaki štap Gerberove grede posebno, kao za prostu gredu za pozitivnu površinu. Potom se ucrtaju svi negativni momenti sa iste strane nosača, gdje su ucrtani pozitivni momenti, te se na mjestima presjecanja mogu postaviti zglobovi.

Momenat savijanja u gredi u nekom presjeku na *x* udaljenosti je:

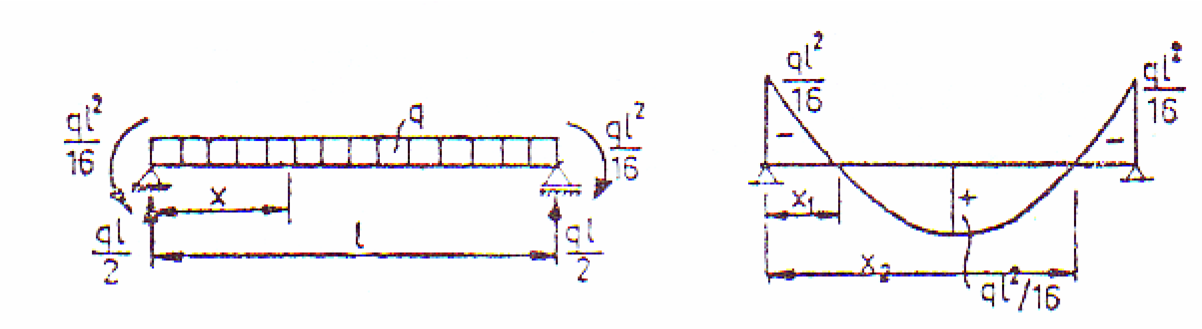
$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} - \frac{ql^2}{16}$$

Mjesto postavljanja zgloba je mjesto gdje je momenat savijanja jednak nuli:

$$M(x_1) = \frac{x_1}{l} - \frac{x_1^2}{l^2} - \frac{1}{8} = 0$$

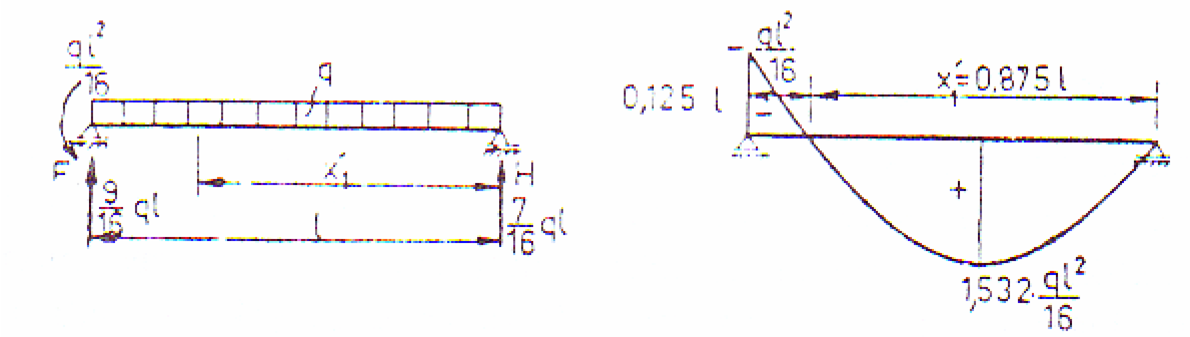
Odakle dobivamo sljedeće udaljenosti za slučaj postavljanja zgobova u srednjim poljima nosača:

$$x_1 = 0{,}1464 \cdot l$$
$$x_2 = 0{,}8536 \cdot l$$



Slika 4: Mjesta postavljanja zglobova za srednja polja nosača

Ako imamo slučaj postavljanja zgloba u krajnja polja nosača, onda imamo sljedeće udaljenosti koje se mogu vidjeti na slici 5:



Slika 5: Mjesta postavljanja zglobova za krajnja polja nosača

Da bi proračunali maksimalni momenat savijanja radi dimenzionisanja poprečnog presjeka nosača potrebno je prvo proračunati reakcije:

$$F_V = \frac{ql}{2} + \frac{ql^2}{16 \cdot l} = \frac{9}{16} \cdot ql$$

$$H_V = \frac{ql}{2} - \frac{ql^2}{16 \cdot l} = \frac{7}{16} \cdot ql$$

Od desnog oslonca na udaljenosti x_1' u jednom presjeku momenat savijanja dobija se izraz:

$$M(x'_1) = \frac{7}{16} \cdot q \cdot l \cdot x'_1 - \frac{q \cdot x'_1}{2}$$

Pošto je mjesto gdje se nalazi zglob i moment savijanja je jednak nuli, onda se dobiva:

$$M(x'_1) = 0 \qquad\qquad x'_1 = \frac{7}{8} \cdot l = 0{,}875 \cdot l$$

Vrijednost maksimalnog momenta savijanja kao što se može vidjeti na slici 5 je:

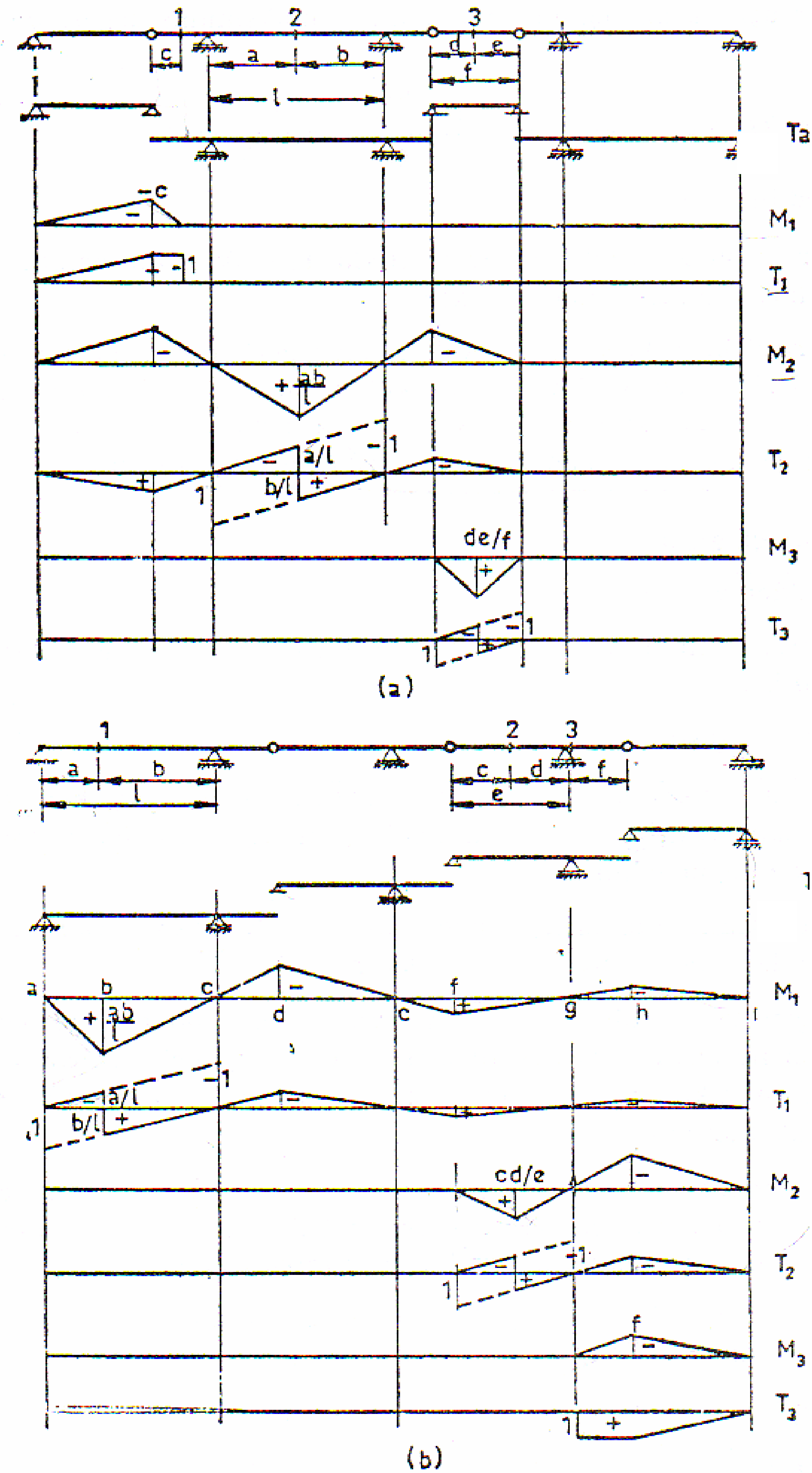
$$\max.M = \frac{E_V^2}{2 \cdot q} = \frac{\left(\frac{7}{16} \cdot q \cdot l\right)^2}{2 \cdot q} = \frac{1{,}532}{16} \cdot q \cdot l^2$$

Ako na ovaj način odredimo mjesta zglobova dobiće se najekonomičniji sistem, jer će se u ovom slučaju moći koristiti najmanji mogući presjeci dobiveni proračunom.

UTICAJNE LINIJE KOD GERBEROVIH GREDA

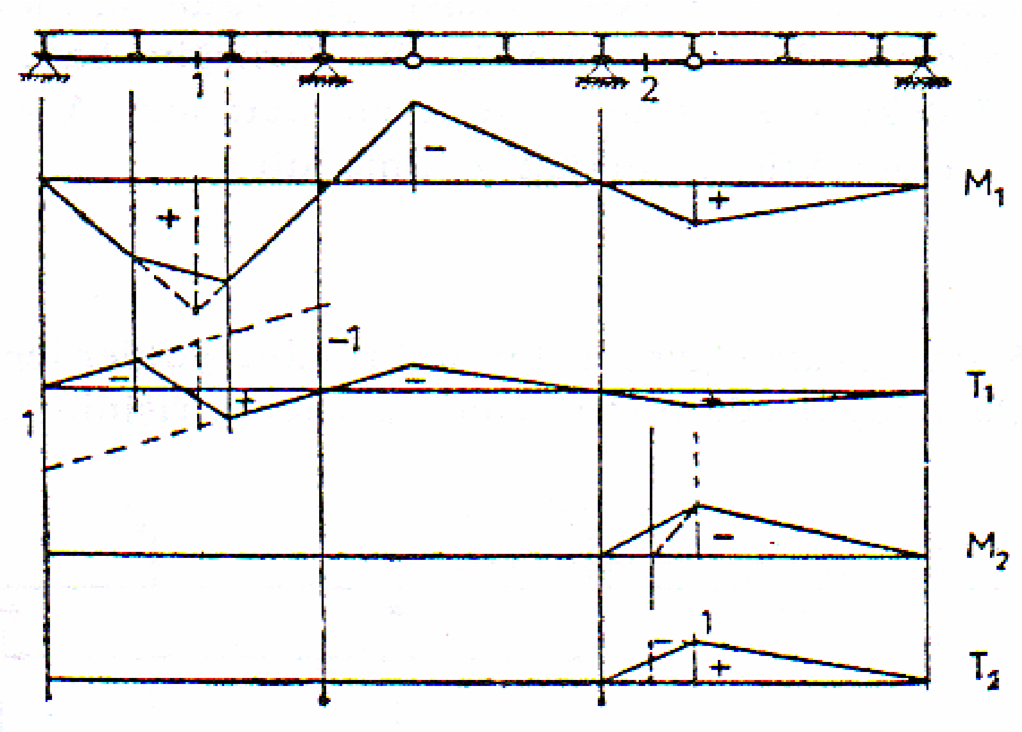
Određivanje uticajnih linija kod Gerberovih greda može se uraditi analitičkim kinematičkim i grafičkim načinom. Da bi mogli odrediti uticajne linije, bilo kojim načinom, moraju se poštovati sljedeća pravila:

1) definisati kretanje jedinične sile po nosaču,
2) nacrtati šemu rastavljanja nosača,
3) odrediti uticajne linije za dijelove nosača na kojima se nalazi presjek, bili oni primarni ili sekundarni,
4) produžiti uticajne linije kroz oslonce do zglobova gdje se „lome“ i do kraja nosača,
5) vrijednost uticajnih linija za momente, transverzalne i normalne sile je jednaka nuli u osloncima, dok u zgloovima postoje vrijednosti, jer se u zglobovima uticajne linije „lome“,
6) vrijednost uticajnih linija za traženu reakciju je jednaka 1,0, a u ostalim osloncima je jednaka nuli, dok u zlobovima postoje vrijednosti,
7) uticajna linija se završava ukoliko je (slika 6):
   a. kraj grede,
   b. ako su dva oslonca u polju,
   c. ako se presjek nalazi na sekundarnom nosaču, koji je prosta greda, te zbog toga se uticajna linija ne može produžiti do zgloba ili kroz susjedni oslonac,



Slika 6: Uticajne linije za razne presjeke kod Gerberovih greda

U slučaju da je indirektno opterećenje od jedinične sile za potrebne presjeku poštuju se gore navedena pravila i dobijaju se uticajne linije koje se mogu vidjeti na slici 7.



Slika 7: Uticajne linije za presjeke 1 i 2 za indirektno opterećenje jedinične sile

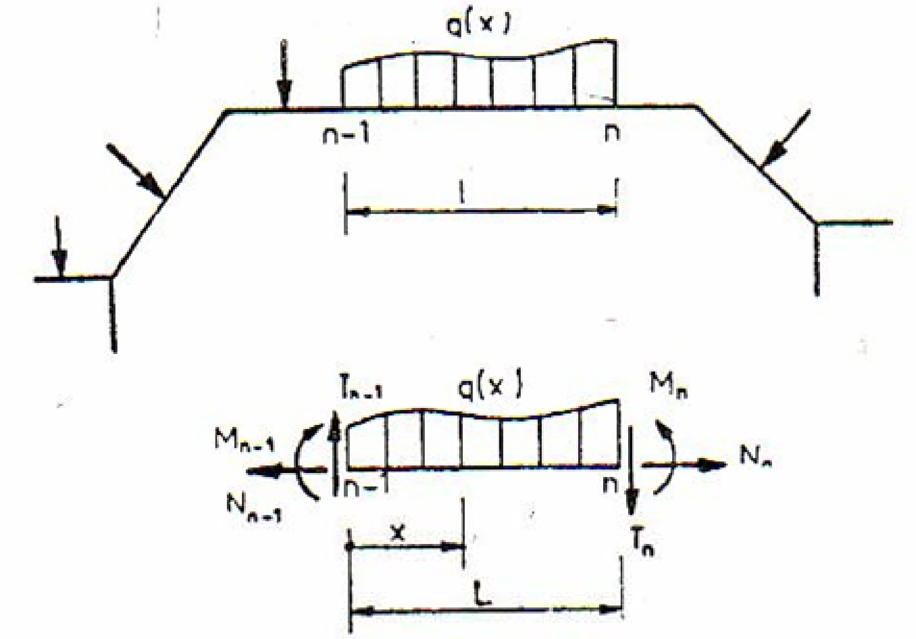
PRORAČUN UNUTRAŠNJIH SILA

Teorema 1

Dosadašnji način proračuna unutrašnjih sila je baziran na teoremi 1.

Teorema 2

Ova teorema je bazirana na proračunu unutrašnjih sila koje se nalaze između dva već proračunata presjeka na krajevima opterećenja.
Ako su nam poznati momenti savijanja M_{n-1} i M_n u presjecima na nosaču *n-1* i *n* kao što je dato na slici 1.



Slika 1

Vrijednost momenta savijanja na udaljenosti *x* od presjeka *n-1* iznosi:

$$M_x = M_{n-1} + T_{n-1} \cdot x + m_x$$

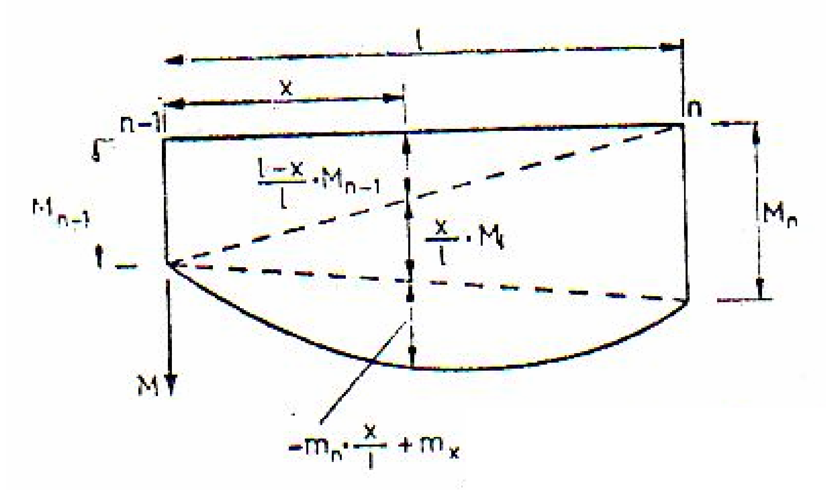
m_x je ovdje vrijednost momenta savijanja između presjeka *n-1* i presjeka *x*.
Ako u gornju jednačinu unesemo $x=l$ onda je:

$$M_n = M_{n-1} + T_{n-1} \cdot l + m_n$$

a ako gornju jednačinu pomnožimo sa x/l dobivamo:

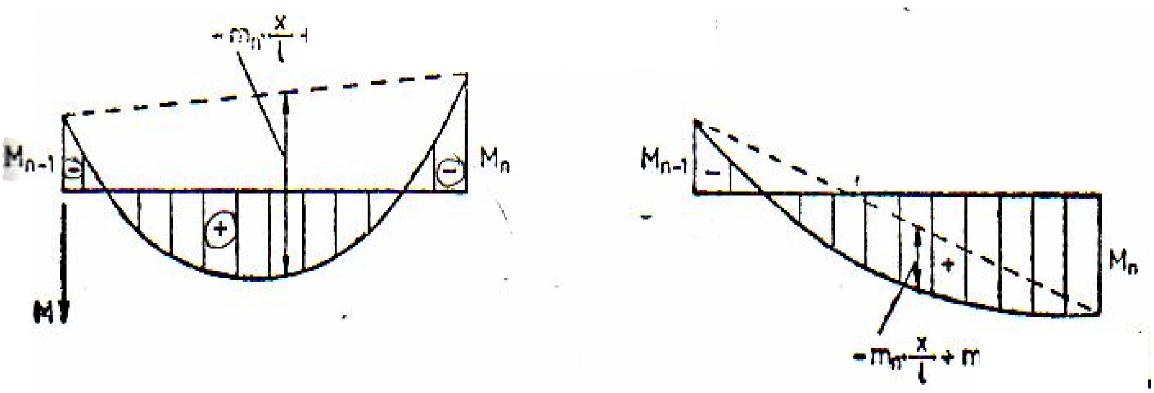
$$M_x = M_n \cdot \frac{x}{l} + M_{n-1} \cdot \frac{l-x}{l} - m_n \cdot \frac{x}{l} + m_x$$

Na ovaj način se može proračunati vrijednost parabole između dva krajnja presjeka kao što se može vidjeti na Slici 2.

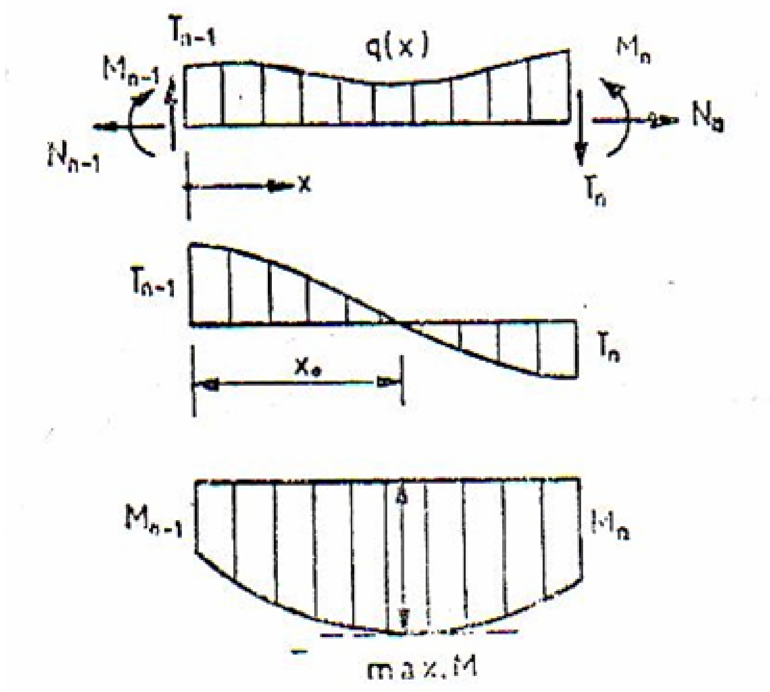


Slika 2

Ako su predzanci momenata savijanja jednaki onda se sabiraju, dok se u suprotnom slučaju oduzimaju, kao što se može vidjeti na slici 3.



Slika 3



Da bi se odredio maksimalni momenat savijanja, prvo se mora odrediti mjesto, gdje je vrijednost transverzalnih sila jednaka nuli, kao što se može vidjeti na slici 4.

Slika

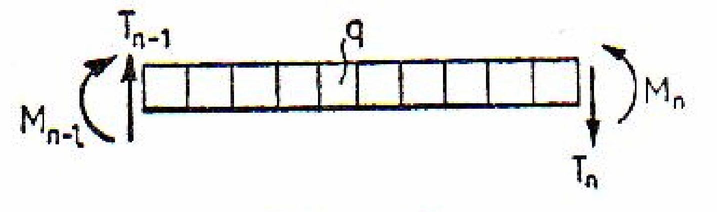
4

$$T(x) = T_{n-1} - \int_0^{x_0} q(x) \cdot dx = 0$$

Ako je $x=x_0$, $0 \leq x_0 \leq l$, dobiva se

$$\max.M = M_{n-1} + T_{n-1} \cdot x_0 - \int_0^{x_0} q(x) \cdot (x_0 - x) \cdot dx$$

U slučaju da je opterećenje između presjeka *n-1* i *n* ravnomjerno kontinuirano (slika 5), onda je:



Slika 5

$$T(x) = T_{n-1} - q \cdot x$$

$$\text{Za } T_x = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{T_{n-1}}{q}, 0 \leq x \leq l$$

$$\max.M = M_{n-1} + T_{n-1} \cdot x_0 - q \frac{x_0^{\ 2}}{2}$$

Ako u gornju jednačinu uvrstimo vrijednost x_0 onda je vrijednost maksimalnog momenta savijanja:

$$\boxed{\max.M = M_{n-1} + \frac{T^2_{n-1}}{2 \cdot q}}$$