

DEFORMACIJE ŠTAPA

Štap je osnovni element linijske konstrukcije čija je dužina znatno veća od druge dvije dimenzije. Dužina štapa je predstavljena dužinom njegove ose, dok je sa druge dvije dimenzije definiran poprečni presjek štapa.

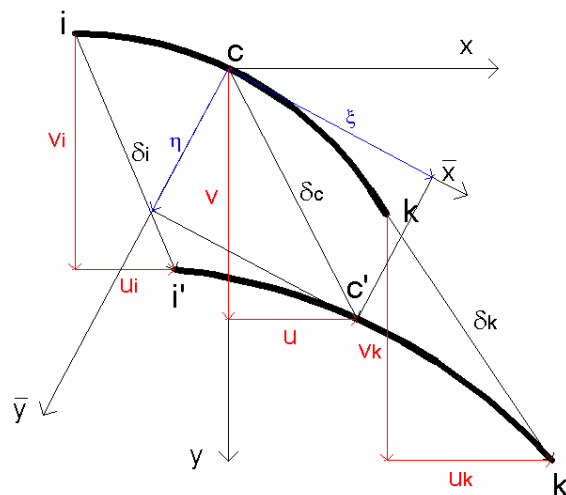
Prema obliku ose štapa razlikujemo prave i krive štapove, a prema obliku poprečnog presjeka štapa razlikujemo štapove konstantnog i promjenjivog poprečnog presjeka.

Razmatramo linearnu teoriju štapa kod koje su veze između pomjeranja, deformacija i sila linearne.

Jednačine linearne teorije štapa su izvedene zahvaljujući sljedećim pretpostavkama:

1. Pretpostavka o malim pomjeranjima ili pretpostavka o statičkoj linearnosti,
2. Pretpostavka o malim deformacijama ili pretpostavka o geometrijskoj linearnosti,
3. Hooke-ov (Hukov) zakon ili pretpostavka o fizičkoj linearnosti.

Posmatraćemo ravne deformacije štapa, odnosno deformacije ravnog štapa u njegovoj ravni.



u, v - pomjeranja u pravcu globalnog koordinatnog sistema

ξ, η - pomjeranja u pravcu lokalnog koordinatnog sistema

Sa slike je :

$$u = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha$$

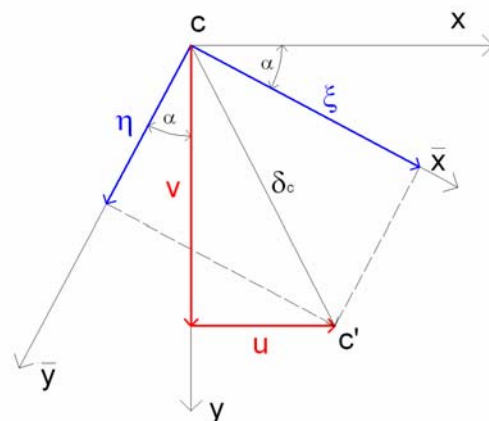
$$v = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha$$

ili napisano u matricnoj formi

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$



Vektorom $\vec{\delta}$ određen je deformacioni oblik ose štapa. Međutim, sa njim se može objasniti i deformacija, odnosno njene komponente u okolini tačke C. Vektor $\vec{\delta}$ daje ukupno pomjeranje svake tačke štapa i sadrži u sebi pomjeranje usljed deformacije štapa i pomjeranje ose kao nedeformirane cjeline, odnosno kinematsko pomjeranje (pomjeranje štapa kao krutog tijela). Da bi se dobio uvid u deformaciju ose štapa uvode se nove veličine (deformacione veličine ose štapa)

$$\begin{aligned} dx &= ds \cos \alpha \\ dy &= ds \sin \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

Sa slike je :

$$\begin{aligned} dx - u + (u + du) &= dx + du \\ dy - v + (v + dv) &= dy + dv \end{aligned} \quad (2)$$

Takođe je :

$$ds + \Delta ds = ds \left(1 + \frac{\Delta ds}{ds}\right) = ds(1 + \varepsilon) \quad (3)$$

gdje je Δds promjena dužine elementa ds .

Analogno (1) imamo :

$$\begin{aligned} dx + du &= (ds + \varepsilon ds) \cos(\alpha + \varphi) \\ dy + dv &= (ds + \varepsilon ds) \sin(\alpha + \varphi) \end{aligned} \quad (4)$$

Kako je :

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \varphi) &= \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi \\ \sin(\alpha + \varphi) &= \sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi \end{aligned} \quad (5)$$

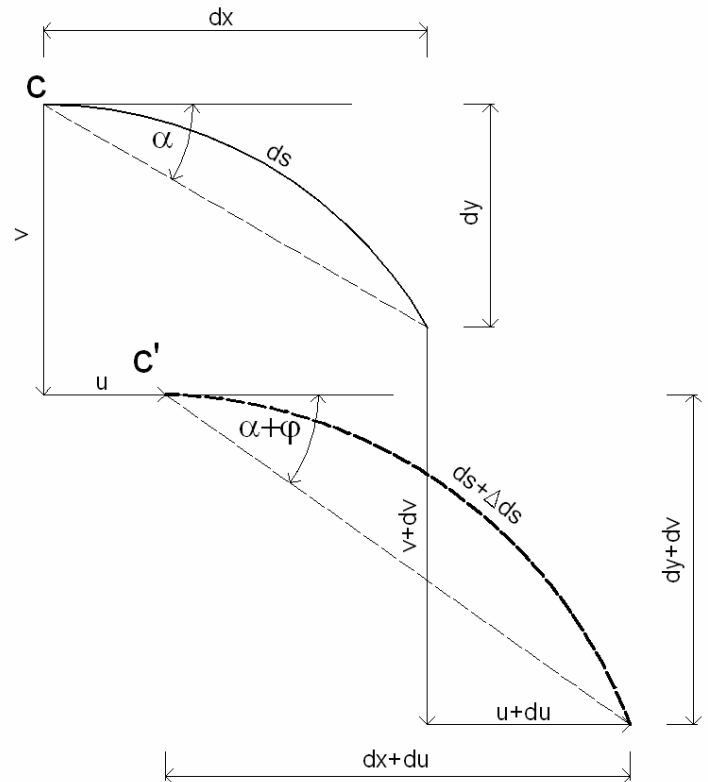
i kada $\varphi \rightarrow 0$ može se smatrati da je $\cos \varphi \cong 1$, odnosno $\sin \varphi \cong \varphi$

jednakost (4) postaje :

$$\begin{aligned} dx + du &= (ds + \varepsilon ds)(\cos \alpha - \varphi \sin \alpha) = ds \cos \alpha - \varphi ds \sin \alpha + \varepsilon ds \sin \alpha - \varphi \varepsilon ds \sin \alpha \\ dy + dv &= (ds + \varepsilon ds)(\sin \alpha + \varphi \cos \alpha) = ds \sin \alpha + \varphi ds \cos \alpha + \varepsilon ds \sin \alpha + \varphi \varepsilon ds \cos \alpha \end{aligned} \quad 6)$$

odnosno :

$$\begin{aligned} dx + du &= dx - \varphi dy + \varepsilon dx - \varphi \varepsilon dy = (1 + \varepsilon)(dx - \varphi dy) \\ dy + dv &= dy + \varphi dx + \varepsilon dy + \varphi \varepsilon dx = (1 + \varepsilon)(dy + \varphi dx) \end{aligned} \quad (7)$$



Kada $\varphi \rightarrow 0$ je $\varepsilon\varphi dy \cong 0$ i $\varepsilon\varphi dx \cong 0$ pa je :

$$\begin{aligned} dx + du &= (1 + \varepsilon)dx - \varphi dy = dx + \varepsilon dx - \varphi dy \\ dy + dv &= (1 + \varepsilon)dy + \varphi dx = dy + \varepsilon dy + \varphi dx \end{aligned} \quad (8)$$

odnosno :

$$\begin{aligned} du &= \varepsilon dx - \varphi dy \\ dv &= \varepsilon dy + \varphi dx \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} du &= \varepsilon ds \cos \alpha - \varphi ds \sin \alpha \\ dv &= \varepsilon ds \sin \alpha + \varphi ds \cos \alpha \end{aligned} \quad (10)$$

U matricnoj formi jednakost (10) se može napisati na slijedeći način

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} = [T] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon ds \\ \varphi ds \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Za prav štap je $\cos \alpha = 1$ i $\sin \alpha = 0$ pa je

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon ds \\ \varphi ds \end{Bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{aligned} du &= \varepsilon dx \\ dv &= \varphi dx \end{aligned}$$

odnosno :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{du}{dx} \\ \varphi &= \frac{dv}{dx} \end{aligned} \quad (12)$$

Jednakost (12) daje vezu između deformacija i pomjeranja. Zbog teorije malih pomjeranja ova veza je linearna.

Geometrijska interpretacija je slijedeća :

εds - prirast komponente pomjeranja elementa štapa u pravcu ose elementa,
 φds - prirast komponente pomjeranja elementa štapa okomito na pravac elementa.