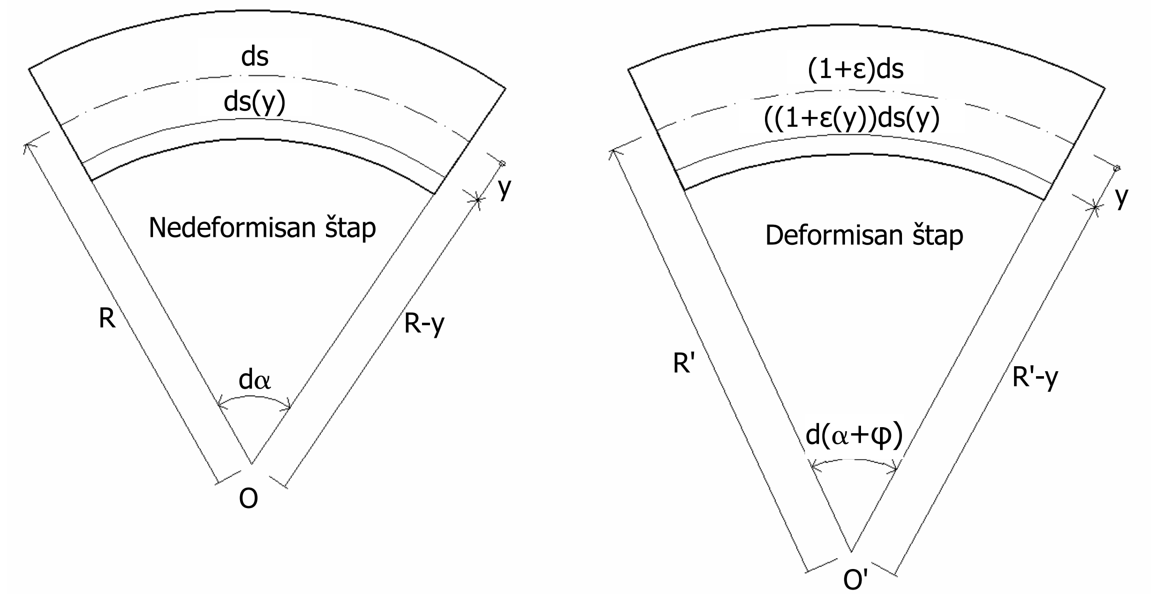
DEFORMACIJA ŠTAPA PRI SAVIJANJU

Koristeći Bernulijevu hipotezu o ravnim presjecima pri savijanju može se naći dilatacija ε bilo kog vlakna koje je udaljeno od ose štapa.



Za nedeformisan štap je :

$$ds = Rd\alpha \quad \Rightarrow \quad ds = Rd\alpha d\alpha = \frac{ds}{R}$$

$$ds(y) = (R - y)d\alpha$$

$$ds(y) = (R - y)\frac{ds}{R} = (1 - \frac{y}{R})ds$$

$$ds(y) = ds - yd\alpha$$

Za deformisan oblik štapa je :

$$[(1 + \varepsilon(y)]ds(y) = (R' - y)d(\alpha + \varphi) = R'd(\alpha + \varphi) - yd(\alpha + \varphi)$$

$$ds(y) + \varepsilon(y)ds(y) = ds + \varepsilon ds - yd\alpha - yd\varphi$$

$$\varepsilon(y)ds(y) = \varepsilon ds - yd\varphi$$

$$\varepsilon(y)(1 - \frac{y}{R})ds = \varepsilon ds - yd\varphi$$

$$\varepsilon(y) = \frac{1}{1 - \frac{y}{R}}(\varepsilon - y\frac{d\varphi}{ds})$$

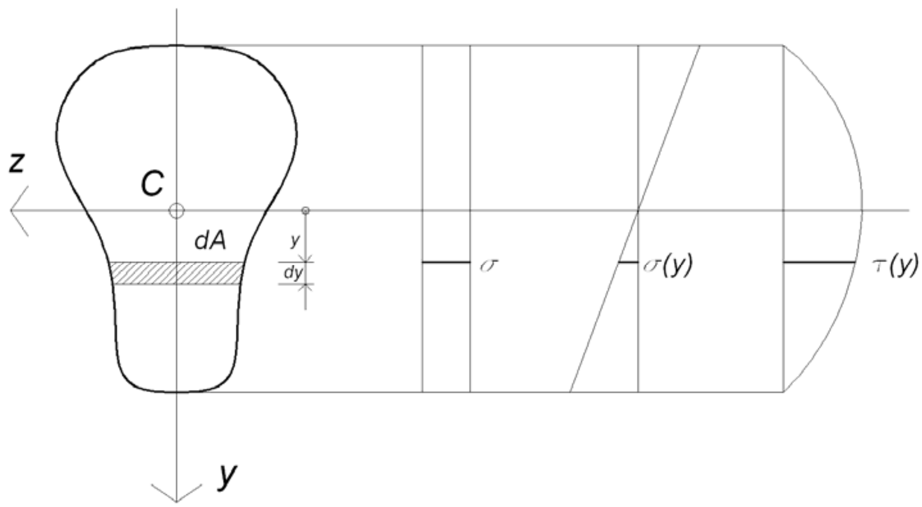
gdje je $\varepsilon(y)$ - dilatacija vlakna na udaljenosti y od neutralne ose.

Za slučaj kada je $R \to \infty$ imamo prav štap, pa je :

$$\varepsilon(y) = \varepsilon - y\frac{d\varphi}{ds}$$

DEFORMACIONE VELIČINE I NJIHOVA ZAVISNOST OD UNUTRAŠNJIH SILA I TEMPERATURNIH PROMJENA

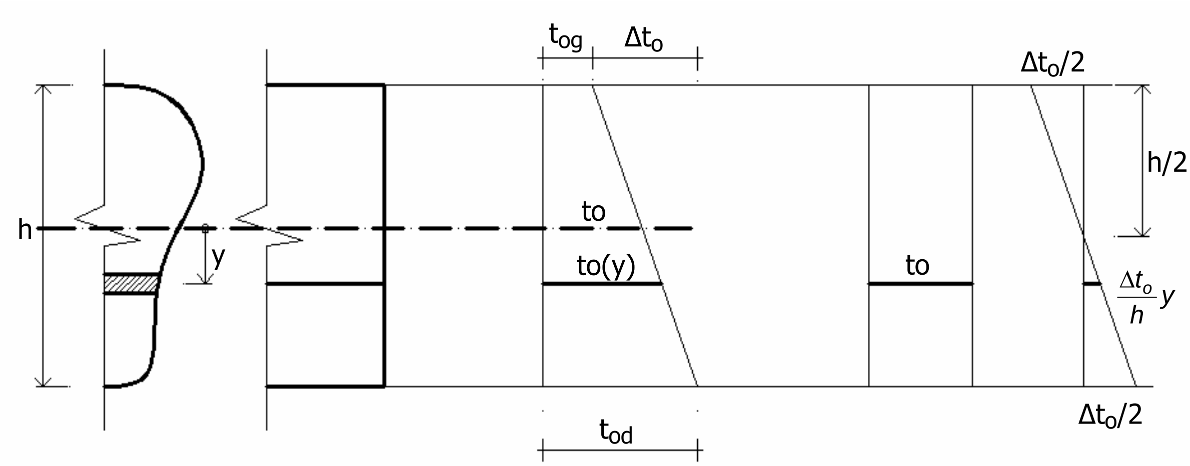
Unutrašnje sile štapa su izražene preko presječnih sila N, M i T. Presječne sile predstavljaju rezultantu napona u presjeku štapa i to:



Ova tri dijagrama prevodimo na presječne sile :

$$N = \int_A \sigma(y) dA \;; \qquad M = \int_A y\sigma(y) dA \;; \qquad T = \int_A \tau(y) dA$$

Temperaturne promjene se dijele na ravnomjerne i neravnomjerne.



Sa slike je :

$$\Delta t_o = t_{og} - t_{od}$$

$$t_o(y) = t_o + \frac{\Delta t_o}{h} y$$

Dilatacija vlakna na udaljenosti y od ose je :

$$\varepsilon(y) = \frac{\sigma(y)}{E} + \alpha_t t_o(y)$$, gdje je α_t - linearni koeficijent temperaturnog širenja.

Ranije je pokazano :

$$\varepsilon(y) = \varepsilon - y\frac{d\varphi}{ds} \quad \text{pa je} \quad \frac{\sigma(y)}{E} = (\varepsilon - y\frac{d\varphi}{ds}) - \alpha_t(t_o + \frac{\Delta t_o}{h}y)$$

odnosno :

$$\sigma(y) = E(\varepsilon - \alpha_t t_o) - Ey(\frac{d\varphi}{ds} + \alpha_t\frac{\Delta t_o}{h})$$

Uvodeći izraz za $\sigma(y)$ u integralne obrasce za N i M dobija se :

$$N = \int_A \sigma(y)dA = \int_A E(\varepsilon - \alpha_t t_o)dA - \int_A Ey(\frac{d\varphi}{ds} + \alpha_t\frac{\Delta t_o}{h})dA =$$

$$= E(\varepsilon - \alpha_t t_o)\int_A dA - E(\frac{d\varphi}{ds} + \alpha_t\frac{\Delta t_o}{h})\int_A ydA$$

$$M = \int_A \sigma(y)ydA = E(\varepsilon - \alpha_t t_o)\int_A ydA - E(\frac{d\varphi}{ds} + \alpha_t\frac{\Delta t_o}{h})\int_A y^2dA$$

Kako je za glavne centralne ose : $A = \int_A dA$; $S = \int_A ydA = 0$; $I = \int_A y^2dA$

gdje su :

A - površina poprečnog presjeka;
S - statički moment površine poprečnog presjeka,
I - moment inercije

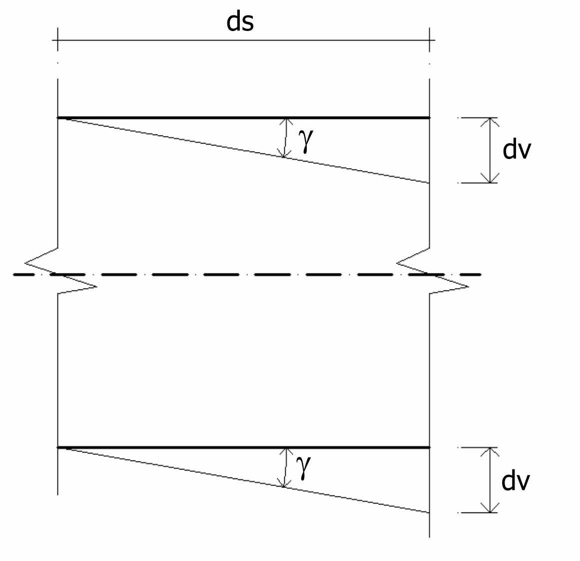
to je :

$$N = (\varepsilon - \alpha_t t_o)EA, \quad \text{odnosno} \quad \frac{N}{EA} = \varepsilon - \alpha_t t_o \quad \text{i}$$

$$M = -(\frac{d\varphi}{ds} + \alpha_t\frac{\Delta t_o}{h})EI, \quad \text{odnosno} \quad \frac{M}{EI} = -\frac{d\varphi}{ds} - \alpha_t\frac{\Delta t_o}{h}$$

Odavde je konačno :

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} + \alpha_t t_o \quad \text{i} \quad \vartheta = -\frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{EI} + \alpha_t\frac{\Delta t_o}{h}$$



$$\gamma = \frac{dv}{ds}$$

$$\gamma = \frac{k}{GA}T$$

k – koeficijent oblika poprečnog presjeka

$$k = \frac{A}{I^2}\int_A \frac{S^2}{b^2}dA$$

Konačno je:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} + \alpha_t t_o \qquad (1)$$

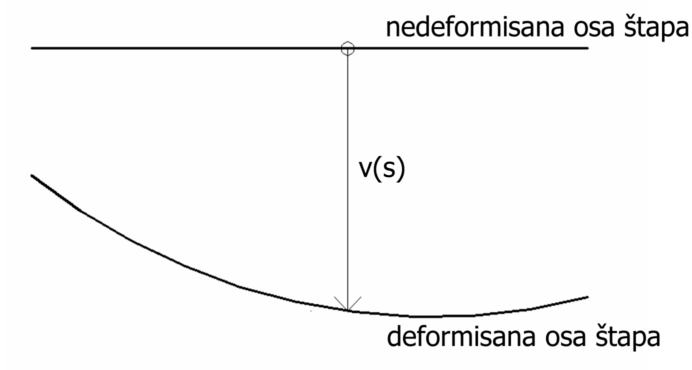
$$\vartheta = -\frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t_o}{h} \qquad (2)$$

$$\gamma = \frac{k}{GA}T \qquad (3)$$

Sa izrazima (1), (2) i (3) izražene su stvarne deformacione veličine štapa u ravni. Pomoću ovih izraza koji vežu deformacione veličine sa jedne strane i presječne sile i temperaturne promjene sa druge strane, mogu se izvesti niz novih odnosa u teoriji linijskih nosača. Dok su relacije (1) i (3) poznate i iz otpornosti materijala, za relaciju (2) mogu se dati još neka dopunska pojašnjenja.

Iz matematike je poznat izraz za zakrivljenost u ravni.

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$



Ako se ovaj izraz primijeni na deformisani oblik štapa u ravni dobijemo:

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{\dfrac{d^2v}{ds^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Sa v(s) je označena ordinata deformisane ose štapa.

Kod teorije malih deformacija koju mi proučavamo smatra se da su pomjeranja zanemarljivo mala u odnosu na dimenzije nedeformisanog štapa, tj. :

$\varphi = \dfrac{dv}{ds} \approx 0$ pa je $\dfrac{1}{R} = \pm \dfrac{d^2v}{ds^2}$

Teorija linijskih nosača za koju vrijede ova uopštenja zove se *TEORIJA PRVOG REDA.*