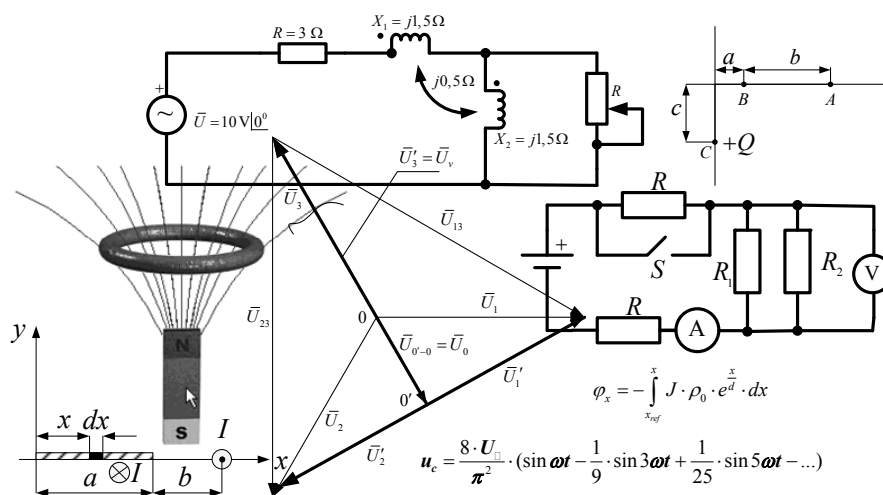


VELEUČILIŠTE U VARAŽDINU

JOSIP HUĐEK

Zbirka riješenih zadataka iz Osnova elektrotehnike 1 i 2



VARAŽDIN, 2009.



Recenzenti:

Prof. dr. Boris Tovornik

Mr. sc. Ivan Šumiga

Objavljivanje ovog udžbenika odobrilo je Stručno vijeće Veleučilišta u Varaždinu, odlukom od 26. veljače 2010.g., klasa:602-04/10-07/3, ur.br. 2186-0231-10-09-01

Copyright © VELEUČILIŠTE U VARAŽDINU

Sva prava pridržana u skladu sa zakonom

ISBN: 978-953-95000-3-8

JOSIP HUĐEK

**Zbirka riješenih zadataka iz
Osnova elektrotehnike 1 i 2**

Prvo izdanje

Varaždin, 2009.

Nakladnik
VELEUČILIŠTE U VARAŽDINU
Križanićeva 33, 42000 Varaždin
Telefon: 042/493-338; telefaks: 042/493-336

Urednica
Dunja Srpak, dipl. ing. el.

Recenzenti
Prof. dr. Boris Tovornik
Mr. sc. Ivan Šumiga

Lektor
Barica Pahić, prof.

Crteže izradio
Josip Huđek, dipl. ing. el.

Tisak i uvez
Finesa d.o.o. Varaždin

Naklada
200 primjeraka

CIP zapis dostupan u računalnom katalogu Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem 729884

SADRŽAJ

| | |
|---|------------|
| Predgovor | 5 |
| Točkasti naboj (zadatci 1-18) | 6 |
| Linijski i plošni naboj (zadatci 19-24) | 19 |
| Prijelaz električnog polja na granici dvaju dielektrika, kapacitet, rad i energija u električnom polju (zadatci 25-33) | 22 |
| Spojevi s kondenzatorima (zadatci 34-38) | 29 |
| Strujni krug istosmjerne struje (zadatci 39-44) | 33 |
| Linearne električne mreže istosmjerne struje (zadatci 45-63) | 38 |
| Nelinearni elementi u krugovima istosmjerne struje (zadatci 64-65) | 56 |
| Nabijena čestica u magnetskom polju (zadatci 66-67) | 57 |
| Izračunavanje jakosti magnetskog polja i magnetske indukcije (zadatci 68-74) | 61 |
| Izračunavanje magnetskog toka (zadatci 75-76) | 67 |
| Magnetski krugovi (zadatci 77-82) | 69 |
| Elektromagnetska indukcija (zadatci 83-86) | 78 |
| Sila, rad i energija u magnetskom polju (zadatci 87-94) | 82 |
| Induktivitet i međuinuktivitet (zadatci 95-98) | 89 |
| Prijelazne pojave (zadatci 99-106) | 91 |
| Trenutna, srednja i efektivna vrijednost izmjenične struje (zadatci 107-113) | 99 |
| Strujni krugovi izmjenične struje, rezonancija, snaga, kompenzacija jalove snage i energije (zadatci 114-133) | 105 |

| | |
|--|------------|
| Prilagodba na maksimalnu snagu (zadatci 134-135) | 128 |
| Rješavanje mreža izmjenične struje - metode (zadatci 136-147) | 130 |
| Trofazni simetrični i nesimetrični sustav (zadatci 148-161) | 143 |
| Međuiduktivitet u mrežama izmjenične struje (zadatci 162-168) | 161 |
| Nesinusoidalne izmjenične veličine (zadatci 169-173) | 168 |
| Idealni transformator (zadatak 174-178) | 173 |
| Svitak s feromagnetskom jezgrom, transformator s feromagnetskom jezgrom (zadatci 179-184) | 177 |
| Primjeri pismenih ispita (1-12) | 181 |
| Rješenja pismenih ispita (1-12) | 193 |
| Popis korištenih oznaka | 196 |
| Popis literature | 198 |

PREDGOVOR

Zbirka je namijenjena studentima prve godine elektrotehničkih veleučilišta i visokih škola radi lakšeg svladavanja propisanog gradiva. Svi zadatci su riješeni analitički, a gdje je bilo moguće i grafički ili simulacijskim programom prilagođenim za elektrotehničku struku.

Određeni broj zadataka je riješen i pomoću matematičkog programa MATLAB koji se u okviru određenih kolegija posebno izučava. Ti zadatci se mogu ponovo prenijeti (prepisati) u editor MATLAB-a i po potrebi mijenjati ili nadopunjavati.

Zadatci u velikoj mjeri pokrivaju teoretska znanja koja se izučavaju u kolegiju Osnove elektrotehnike I i Osnove elektrotehnike II. Na kraju zbirke ponuđeno je 12 ispitnih primjera (zadaca) s gotovim rješenjima da bi studenti osjetili težinu ispitnih zadataka. Nadam se da ovim svojim radom pomažem studentima da lakše svladaju materiju koja se izučava u kolegijima Osnove elektrotehnike I i Osnove elektrotehnike II.

TOČKASTI NABOJ

1.) Naboji Q_1 i Q_2 smješteni su u točkama A i B daleko od drugih električnog izvora polja i pritom se privlače silom F . Treba odrediti jakost električnog polja u točki B, kada se iz nje odstrani naboj Q_2 . Zadano je: $Q_1 = 5 \mu\text{As}$, $Q_2 = -0,8 \mu\text{As}$, $F = 0,9 \text{ N}$.

1a.) Rješenje: U zadatku nije zadana udaljenost između naboja, ali se može izračunati iz poznatih podataka. Apsolutni iznos sile F , koja vlada između naboja A i B, iznosi:

$$F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{AB}^2} = 0,9;$$

Udaljenost između naboja iznosi:

$$r_{AB}^2 = \frac{k \cdot Q_1 \cdot Q_2}{0,9} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,8 \cdot 10^{-6}}{0,9} = 4 \cdot 10^{-2}. \quad r_{AB} = 2 \cdot 10^{-1} = 0,2 \text{ m}$$

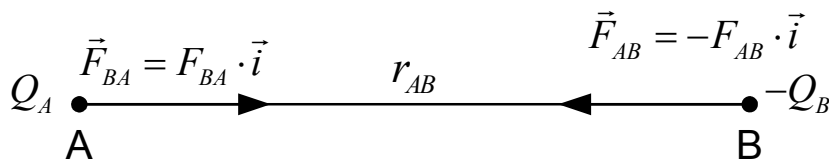
Jakost električnog polja u točki B, iz koje je odstranjen naboj Q_2 , iznosi:

$$E = k \cdot \frac{Q_1}{r_{AB}^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}}{0,2^2} = 1125 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

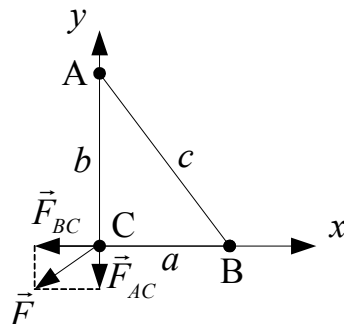
Sila između naboja A i B se sada može izraziti kao:

$$F_{AB} = F_{BA} = E_A \cdot Q_B = 1125 \cdot 10^3 \cdot 0,8 \cdot 10^{-6} = 0,9 \text{ N}$$

Sile u vektorskom obliku zapisane su na slici:



2.) U vrhovima A, B i C pravokutnog trokuta (prema slici), čije su katete $a = 3 \text{ cm}$; $b = 4 \text{ cm}$, nalaze se naboji: $Q_A = 4 \text{ nC}$; $Q_B = 3 \text{ nC}$; $Q_C = 5 \text{ nC}$. Koliko iznosi sila na naboj Q_C ?



2a.) Rješenje:

$$\text{Sila na naboj } Q_C \text{ iznosi: } \vec{F} = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{BC} = -k \cdot \frac{Q_A \cdot Q_C}{b^2} \cdot \vec{j} - k \cdot \frac{Q_B \cdot Q_C}{a^2} \cdot \vec{i}$$

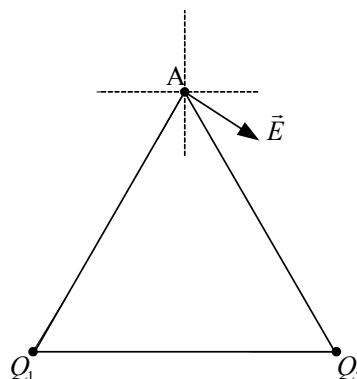
$$\vec{F} = -9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{4 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{16 \cdot 10^{-4}} \cdot \vec{j} + \frac{3 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{9 \cdot 10^{-4}} \cdot \vec{i} \right) = -9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{5}{4} \cdot 10^{-14} \vec{j} + \frac{5}{3} \cdot 10^{-14} \cdot \vec{i} \right)$$

$$\vec{F} = -11,25 \cdot 10^{-5} \vec{j} - 15 \cdot 10^{-5} \cdot \vec{i}$$

$$\text{Apsolutni iznos sile na naboj u točki C iznosi: } F = 10^{-5} \cdot \sqrt{11,25^2 + 15^2} = 18,75 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

3.) Električno polje dvaju točkastih naboja u točki A ima smjer i orijentaciju kao na slici. Predznaci i veličine naboja Q_1 i Q_2 su:

- a) $|Q_1| = |Q_2|$ oba +
- b) $|Q_1| > |Q_2|$ $Q_1(+), Q_2(-)$
- c) $|Q_1| > |Q_2|$ $Q_1(-), Q_2(+)$
- d) $|Q_1| < |Q_2|$ $Q_1(-), Q_2(+)$
- e) $|Q_1| < |Q_2|$ $Q_1(+), Q_2(-)$



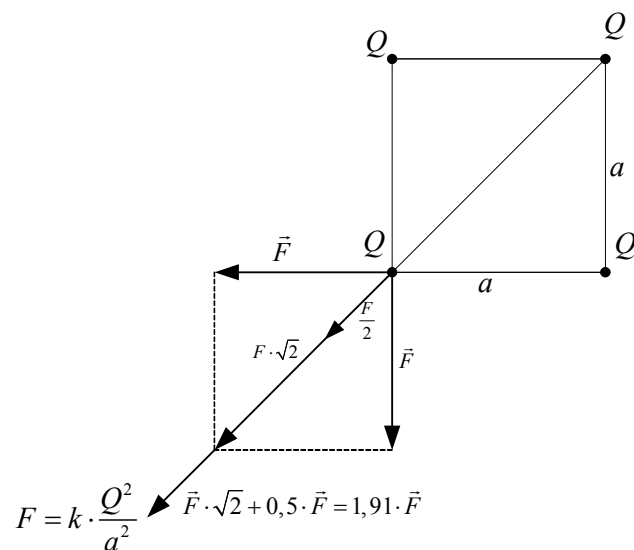
3.a) Rješenje:

Točan odgovor je e. (proanalizirati i druge slučajeve)

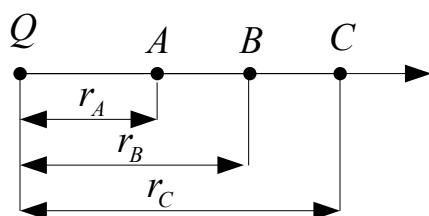
4.) Četiri točkasta naboja smještena su u vrhovima kvadrata stranice a . Naboji su istog iznosa i polariteta. Ako je sila između dva naboja razmaknuta za a označena s F , kolika će biti rezultantna sila na svaki od naboja?

4.a) Rješenje:

Sila između dva naboja razmaknuta za a iznosi F , a ukupna sila iznosi $F_u = 1,91 \cdot F$.



5.) Na silnici polja točkastog naboja odabrane su točke A, B i C tako da je točka B na sredini dužine \overline{AC} . Uz zadane iznose polja u točkama A i C treba, odrediti polje u točki B.



Zadano je: $E_A = 36 \frac{\text{V}}{\text{m}}$; $E_C = 9 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

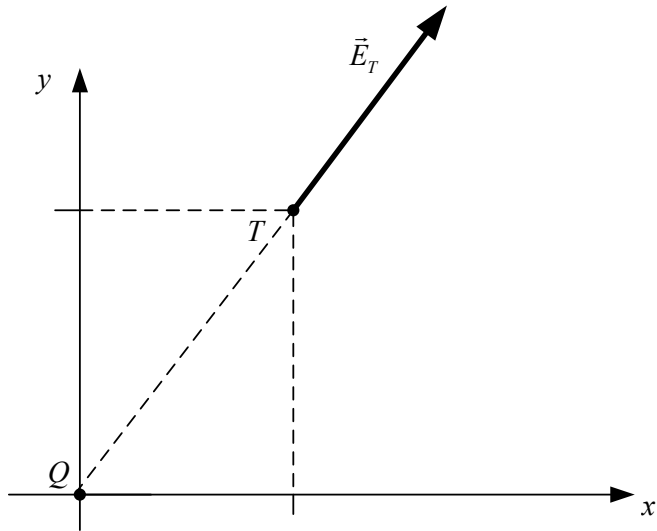
5.a) Rješenje:

$$\frac{E_A}{E_C} = \frac{\frac{kQ}{r_A^2}}{\frac{kQ}{r_C^2}} = \frac{kQ r_C^2}{kQ r_A^2}$$

$$\frac{E_A}{E_C} = \frac{36}{9} = \frac{r_C^2}{r_A^2} = 4 \quad r_C^2 = 4r_A^2 \quad r_C = 2r_A \quad r_B = \frac{r_A + r_C}{2} \quad kQ = E_A r_A^2$$

$$r_B = \frac{r_A + 2r_A}{2} = \frac{3r_A}{2} \quad E_B = \frac{kQ}{r_B^2} = \frac{E_A r_A^2}{\frac{9r_A^2}{4}} = \frac{E_A \cdot 4}{9} = \frac{4}{9} \cdot E_A = \frac{4}{9} \cdot 36 = 16 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

6.) Ako se naboj $Q = 1 \text{ nC}$ nalazi u ishodištu koordinatnog sustava, koliki je vektor jakosti električnog polja u točki $T(3,4) \text{ cm}$?



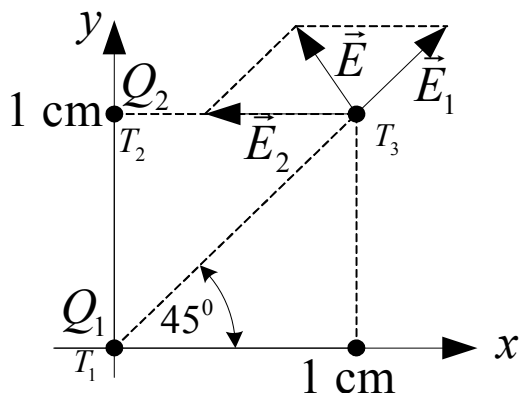
6.a) Rješenje:

```

Q=1e-9;k=9e9;r=[3 4]*1e-2;
ra=norm(r)
ro=r/ra
E=k*Q/ra^2
Ev=E*ro
alfa=atan(4/3)*180/pi
-----
>> ra =
    0.0500
ro =
    0.6000    0.8000
E =
    3.6000e+003
Ev =
    1.0e+003 *
    2.1600    2.8800
alfa =
    53.1301

```

7.) Potrebno je izračunati vektor jakosti električnog polja u točki $T(1,1)$ ako je $Q_1 = 10 \text{ nC}$ i $Q_2 = -10 \text{ nC}$.



7.a) Rješenje:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = k \cdot \frac{Q_1}{2 \cdot 10^{-4}} \cdot \cos 45^\circ \cdot \vec{i} + k \cdot \frac{Q_1}{2 \cdot 10^{-4}} \cdot \sin 45^\circ \cdot \vec{j} - k \cdot \frac{Q_2}{1} \cdot \vec{i}$$

$$\vec{E}_1 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-4}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{j} \right) = 45 \cdot 10^4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{i} + 45 \cdot 10^4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{j} = (31,82 \cdot \vec{i} + 31,82 \cdot \vec{j}) \cdot 10^4$$

$$\vec{E}_2 = -k \cdot \frac{Q_2}{1 \cdot 10^{-4}} \cdot \vec{i} = -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-9}}{10^{-4}} \cdot \vec{i} = -90 \cdot 10^4 \cdot \vec{i}$$

$$\vec{E} = (31,82 \cdot \vec{i} + 31,82 \cdot \vec{j} - 90 \cdot \vec{i}) \cdot 10^4 = (-58,18 \cdot \vec{i} + 31,82 \cdot \vec{j}) \cdot 10^4$$

$$\vec{E} = -581,8 \cdot \vec{i} + 318,2 \cdot \vec{j} \quad \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

7.b) Drugi način:

$$\vec{E}_1 = 45 \cdot 10^4 \cdot \vec{r}_{013}; \quad \vec{r}_{013} = \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}}; \quad r_{13} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}; \quad \vec{r}_{13} = 1 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j}; \quad \vec{r}_{013} = \frac{1 \cdot \vec{i}}{\sqrt{2}} + \frac{1 \cdot \vec{j}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{E}_1 = 45 \cdot 10^4 \cdot (0,707 \cdot \vec{i} + 0,707 \cdot \vec{j}) = 318,15 \cdot \vec{i} + 318,15 \cdot \vec{j} \quad \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

$$\vec{E}_2 = -k \cdot \frac{Q_2}{1 \cdot 10^{-4}} \cdot \vec{i} = -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-9}}{10^{-4}} \cdot \vec{i} = -90 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} = -900 \cdot \vec{i} \quad \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

$$\vec{E} = -581,8 \cdot \vec{i} + 318,2 \cdot \vec{j} \quad \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

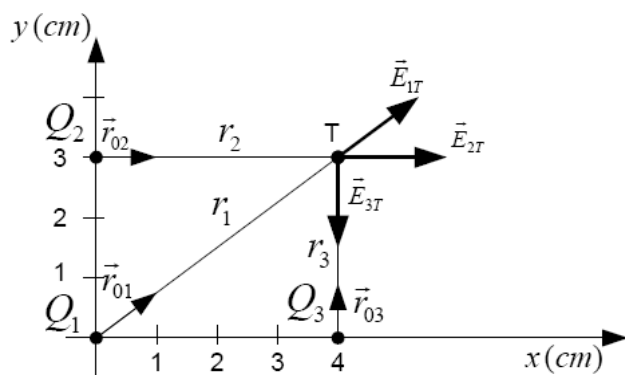
8.) U ravнини $z=0$ se u točki $T_1(0,0)$ nalazi naboj $Q_1 = 10\text{ nC}$, a u točki $T_2(0,1)\text{ cm}$ naboj $Q_2 = -10\text{ nC}$. Treba izračunati vektor jakosti električnog polja u točki $T_3(1,1)\text{ cm}$.

8.a) Rješenje: (MATLAB)

```
T1=[0 0 0];Q1=10e-9;T2=[0 1e-2 0];Q2=-10e-9;T3=[1e-2 1e-2 0];eps=8.854e-12; %zadano
r1=T3-T1 %vektor udaljenosti naboja Q1 od točke u kojoj se traži E (orijentiran prema T3)
r1a=norm(r1) %apsolutni iznos vektora r1
E1=Q1/(4*pi*eps*r1a^2) % iznos E1
r1o=r1/r1a % jedinični vektor
E1v=E1*r1o % vektor E1
r2=T3-T2 % vektor udaljenosti naboja Q2 od točke T3
r2a=norm(r2) % apsolutni iznos vektora r2
r2o=r2/r2a %jedinični vektor
E2=Q2/(4*pi*eps*r2a^2)% iznos jakosti električnog polja u točki T3 od naboja Q2
E2v=E2*r2o %vektor jakosti električnog polja od naboja Q2 u točki T3
Ev=(E1v+E2v)/1e3 %kV/m vektor ukupne jakosti električnog polja u točki T3
```

```
>> r1 = 0.0100    0.0100        0
r1a = 0.0141
E1 = 4.4939e+005
r1o = 0.7071    0.7071        0
E1v =
1.0e+005 *
3.1776    3.1776        0
r2 =
0.0100        0        0
r2a =
0.0100
r2o =
1    0    0
E2 =
-8.9877e+005
E2v =
1.0e+005 *
-8.9877        0        0
Ev =
-581.0096    317.7647        0
>> r1 =
0.0100    0.0100        0
r1a =
0.0141
E1 =
4.4939e+005
r1o =
0.7071    0.7071        0
E1v =
1.0e+005 *
3.1776    3.1776        0
r2 =
0.0100        0        0
r2a =
0.0100
r2o =
1    0    0
E2 =
-8.9877e+005
E2v =
1.0e+005 *
-8.9877        0        0
Ev =
-581.0096    317.7647        0 kV/m
>>
```

9.) Potrebno je izračunati apsolutni iznos jakosti električnog polja u točki T prema slici.



9.a) Rješenje: (MATLAB)

```

Q1=1e-9;Q2=2e-9;Q3=-2e-9;r2=[4e-2 0 0];r3=[0 3e-2 0];k=9e9;
r1=r2+r3
r1a=norm(r1)
r20=r2/r2a
r30=r3/r3a
r10=r1/r1a
E1=k*Q1/r1a^2
E1v=E1*r10
E2=k*Q2/r2a^2
E2v=E2*r20
E3=k*Q3/r3a^2
E3v=E3*r30
Ev=E1v+E2v+E3v
Ea=norm(Ev)/1e3 %kV/m
-----
r1a =
    0.0500
r20 =
     1     0     0
r30 =
     0     1     0
r10 =
    0.8000    0.6000     0
E1 =
    3.6000e+003
E1v =
    1.0e+003 *
    2.8800    2.1600     0
E2 =
    11250
E2v =
    11250     0     0
E3 =
   -20000
E3v =
     0   -20000     0
Ev =
    14130   -17840     0
Ea =
    22.7579 kV/m
>>

```

10.) Šuplja metalna kugla polumjera R ispunjena zrakom nabijena je nabojem Q i nalazi se u zraku.

a) Treba odrediti jakost i smjer električnog polja na udaljenosti r od središta kugle.

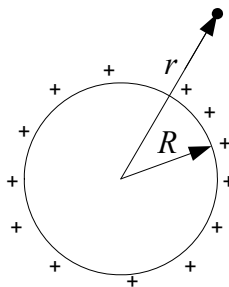
Zadano je:

$$Q = 10 \text{ nAs}$$

$$R = 10 \text{ cm}$$

$$r = 15 \text{ cm}$$

$$E_r = ?$$



10.a) Rješenje:

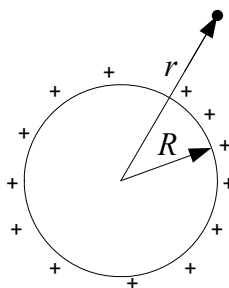
$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{10 \cdot 10^{-9}}{4\pi\epsilon_0 \cdot (15 \cdot 10^{-2})^2} = 4000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

b) Koliki je najveći naboj moguće dovesti na kuglu, ako u zraku dolazi do proboja, kad jakost polja premaši $3 \frac{\text{kV}}{\text{mm}}$?

Zadano je:

$$E_{\text{max}} = 3 \frac{\text{kV}}{\text{mm}}$$

$$R = 10 \text{ cm}$$

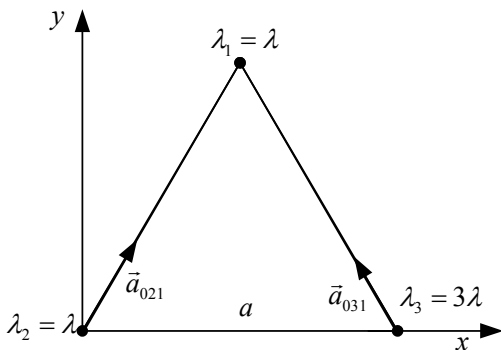


10.b) Rješenje:

$$3 \frac{\text{kV}}{\text{mm}} = 3 \cdot \frac{10^3 \text{ V}}{10^{-3} \text{ m}} = 3 \cdot 10^{3+3} \frac{\text{V}}{\text{m}} = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$Q_{\text{max}} = E_{\text{max}} \cdot 4\pi\epsilon_0 R^2 = 3,34 \cdot 10^{-6} \text{ As}$$

11.) Tri paralelna linijska naboja su razmještena u vrhove istostraničnog trokuta. Potrebno je izraziti silu na jedinicu dužine \vec{f} na naboj λ_1 .



11a.) Rješenje: Sila

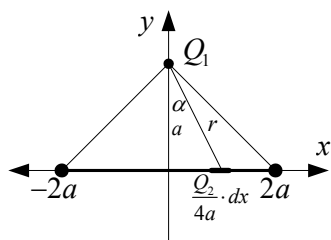
$$\begin{aligned}\vec{f}_{21} &= \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} \cdot (\vec{i} \cdot \cos 60^\circ + \vec{j} \cdot \sin 60^\circ) \\ &= \frac{\lambda^2}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \vec{j} \right)\end{aligned}$$

$$\text{Sila } \vec{f}_{31} = \frac{\lambda \cdot 3 \cdot \lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \cdot \left(-\vec{i} \cdot \frac{1}{2} + \vec{j} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Ukupna sila na naboj λ_1 iznosi:

$$\vec{f} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{31} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{1}{2} \cdot \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \vec{j} - \frac{3}{2} \cdot \vec{i} + \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \vec{j} \right) = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 a} \cdot (-\vec{i} + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \vec{j})$$

12.) Treba izvesti izraz za silu na točkasti naboj Q_1 koji se nalazi na udaljenosti a od nabijene žice dužine $4a$ s nabojem Q_2 . Naboj na žici je jednolike raspodjele.

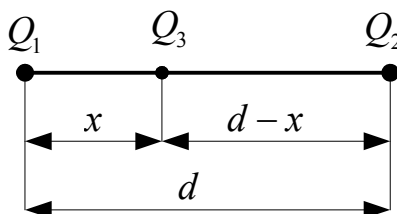


12.a) Rješenje: Potrebno je zapisati dE u točki $(0, a)$ i dQ na nabijenoj žici, te integrirati komponente u smjeru osi y .

$$dE = \frac{dQ_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}; \quad dQ_2 = \frac{Q_2}{4a} \cdot dx$$

$$E(0, a) = \int_{-2a}^{2a} dE \cos(\alpha) = \int_{-2a}^{2a} \frac{\frac{Q_2}{4a} dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{a}{r} = \frac{Q_2}{4 \cdot 4\pi\epsilon_0} \int_{-2a}^{2a} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q_2}{4\sqrt{5}\pi\epsilon_0 a^2}$$

13.) Dva točkasta naboja s $Q_1 = Q$ i $Q_2 = 4Q$ se nalaze na međusobnoj udaljenosti d . Na spojnici između njih se nalazi treći naboj s $Q_3 = 3Q$. Na kojoj udaljenosti x od prvog naboja će električna sila na treći naboj biti jednaka 0.



13.a) Rješenje:

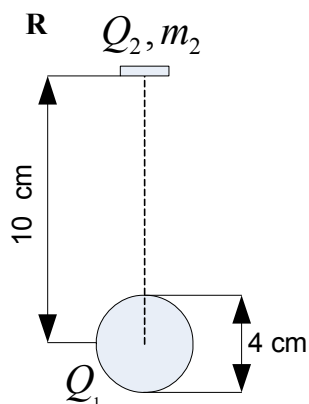
Ukupna sila na treći naboj bit će jednaka 0 ako je:

$$k \cdot \frac{3Q \cdot Q}{x^2} = k \cdot \frac{3Q \cdot 4Q}{(d-x)^2}; \quad \frac{1}{x^2} = \frac{4}{(d-x)^2}$$

$$d^2 - 2dx + x^2 = 4x^2; \quad 3x^2 + 2dx - d^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2d \pm \sqrt{4d^2 + 12d^2}}{6} = \frac{-2d \pm 4d}{6}; \quad x = \frac{d}{3}$$

14.) Koliki mora biti naboj Q_1 na kugli da aluminijski listić s nabojem $Q_2 = 10^{-8}$ As i masom $m = 1$ g lebdi 10 cm iznad kugle.



14a.) Rješenje: Električna odbojna sila i težina listića moraju biti u ravnoteži, tj.

$$m_2 \cdot g = E_{II} \cdot Q_2 \quad (E_{II} \text{ je polje kugle na poziciji listića})$$

$$E_{II} = \frac{mg}{Q_2} = \frac{10^{-3} \cdot 10}{10^{-8}} = 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Naboj kugle mora iznositi:

$$Q_1 = E_{II} \cdot 4\pi\epsilon_0 r^2 = 10^6 \cdot \frac{10^{-9}}{9} \cdot 10^{-2} = \frac{10^{-5}}{9} = \frac{10 \cdot 10^{-6}}{9} = 1,11 \mu\text{C}$$

15.) Naboji $Q_1 = 5 \text{ nC}$ i $Q_2 = -2 \text{ nC}$ nalaze se na razmaku $r_1 = 1 \text{ m}$ (položaj 1). Koliki je izvršeni rad i tko će ga izvršiti ako se naboji približe na razmak $r_2 = 0,5 \text{ m}$ (položaj 2)?

15.a) Rješenje: Potencijalna energija sustava dva naboja u položaju 1 iznosi:

$$W_{p1} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{-10 \cdot 10^{-18} \cdot 36\pi}{4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 1} = -9 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

Potencijalna energija sustava dva naboja u položaju 2 iznosi:

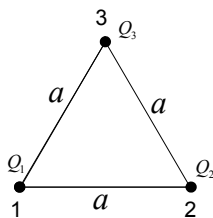
$$W_{p2} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{-10 \cdot 10^{-18} \cdot 36\pi}{4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 0,5} = -18 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

Izvršeni rad jednak je razlici početne i konačne energije:

$$A = W_{p1} - W_{p2} = 9 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

Dobiveni rezultat (pozitivan) pokazuje da je rad izvršilo električno polje, jer se naboji privlače, što znači da je do premještanja naboja došlo zbog električnih sila polja.

16.) Potrebno je izračunati potencijalnu energiju sustava točkastih naboja raspoređenih u vrhove istostraničnog trokuta, ako je $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q = 1 \text{ nC}$ i $a = 2 \text{ cm}$



16.a) Rješenje:

$$W_p = \frac{1}{2} \cdot (Q_1 \cdot \varphi_1 + Q_2 \cdot \varphi_2 + Q_3 \cdot \varphi_3)$$

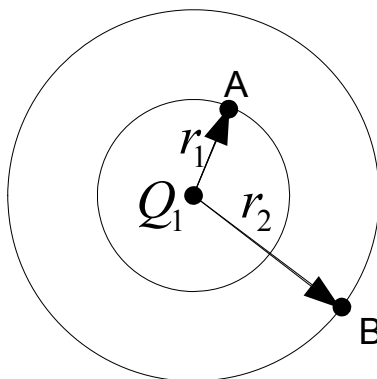
$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_3}{a}; \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_3}{a};$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{a}$$

Slijedi da su potencijali $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$, pa je: $W_p = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot Q \cdot \varphi$

$$\varphi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{a}, \text{ odnosno } W_p = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{3 \cdot (10^{-9})^2 \cdot 36\pi}{4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 13,5 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

17.) Potrebno je izračunati napon u polju točkastog naboja između točke A koja leži na ekvipotencijalnoj plohi s $r_1 = 1$ m i točke B, koja leži na ekvipotencijalnoj plohi s $r_2 = 2$ m, ako je iznos točkastog naboja $Q = 1 \mu\text{C}$.



17.a) Rješenje: Potencijal točke A prema definiciji potencijala je:

$$\varphi_A = - \int_{\infty}^{r_A} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

Potencijal točke B se zapisuje kao:

$$\varphi_B = - \int_{\infty}^{r_B} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$

Napon je jednak razlici potencijala u točkama A i B pa je:

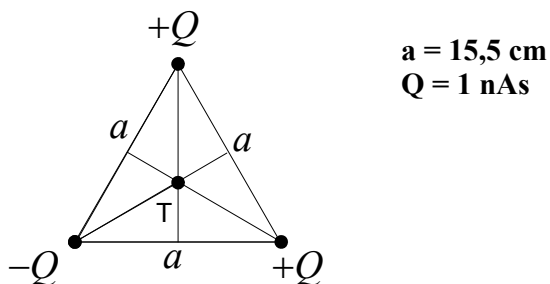
$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_B} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \right)$$

$$U_{AB} = \frac{10^3 \cdot 9}{2} = 4,5 \cdot 10^3 \text{ V}$$

18.) Tri točkasta naboja smještena su u vrhovima jednakostraničnog trokuta stranice a .

a) Koliki je potencijal točke koja se nalazi u težištu trokuta ?

b) Ako su sva tri naboja pozitivna, koliki je potencijal u težištu trokuta ?



18.a) Rješenje:

$$\varphi_{uk} = \varphi^+ + \varphi^+ - \varphi^-$$

$$\frac{2}{3} \cdot v = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot a \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\varphi_{uk} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} + \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a \sqrt{3}} = 100,4 \text{ V}$$

18.b) Rješenje:

$$\varphi_{uk} = \varphi^+ + \varphi^+ + \varphi^+ = 3 \cdot \varphi$$

$$\frac{2}{3} \cdot v = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot a \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\varphi_{uk} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} + \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} + \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{9 \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a \sqrt{3}} = 301,2 \text{ V}$$

LINIJSKI I PLOŠNI NABOJ

19.) Koliki rad izvrši homogeno električno polje jakosti $\vec{E} = (-20, 10, 30) \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ pri pomaku točkastog naboja $Q = 1 \mu\text{C}$ od točke $A(10, 10, 40)$ cm do točke $B(0, 30, 50)$ cm?

19.a) Rješenje: Rad koji izvrši električno polje pri pomaku točkastog naboja iz jedne točke u drugu, zapisuje se kao: $A = Q \cdot U_{AB}$. Taj napon je jednak linijskom integralu vektora jakosti električnog polja po nekoj krivulji između zadanih točaka pa je

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{l} = [-20000, 10000, 30000] \cdot [(0-10), (30-10), (50-40)] \cdot 10^{-2} =$$

$$= (-20000) \cdot (-0,1) + 10000 \cdot 0,2 + 30000 \cdot 0,1 = 7000 \text{ V}$$

Izvršeni rad je: $A = 10^{-6} \cdot 7 \cdot 10^3 = 7 \cdot 10^{-3} = 7 \text{ mJ}.$

20.) Homogeno električno polje zapisano u vektorskom obliku iznosi:

$\vec{E} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k} \frac{\text{kV}}{\text{m}}$. Koliko iznosi potencijal u točki $B(2 \text{ dm}, 3 \text{ dm}, -1 \text{ dm})$ ako je potencijal u točki $A(3 \text{ dm}, 2 \text{ dm}, 0 \text{ dm})$ jednak 1540 V ?

20.a) Rješenje: Napon između točaka A i B je jednak razlici potencijala u tim točkama, odnosno linijskom integralu jakosti električnog polja između točaka A i B.

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{l} = [3000, -4000, 5000] \cdot [(-0,1), (0,1), (-0,1)]$$

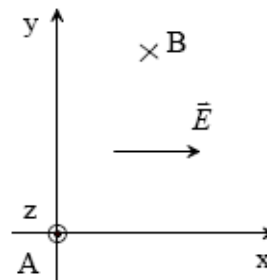
$$= -300 - 400 - 500 = -1200 \text{ V}$$

S obzirom na to da je skalarni produkt vektora broj, potencijal točke B je prema tome jednak:

$$\varphi_B = \varphi_A - U_{AB} = 1540 - (-1200) = 2740 \text{ V}$$

21.) Zadano je homogeno električno polje

$$\vec{E} = 2 \cdot 10^3 \cdot \vec{i} \left(\frac{\text{V}}{\text{m}} \right).$$

Koliki je iznos napona između točaka $A = (0; 0; 0;)$ i $B = (0,1 \text{ m}; 0,2 \text{ m}; 0;)$?**21.a) Rješenje: (MATLAB)**

```
E=[2 0 0]*1e3; A=[0 0 0];B=[0.1 0.2 0];
lv=B-A
U=dot(E,lv)
lv =
    0.1000    0.2000     0
U =
    200
```

Polje ima komponentu u smjeru osi x i y

```
A=[0 0 0];B=[0.1 0.2 0];
E=[2 1 0]*1e3
lv=B-A
U=dot(E,lv)
*****
> E =
    2000    1000     0
lv =
    0.1000    0.2000     0
U =
    400
```

22.) Sferični ionski oblak polumjera $a = 10$ cm ima prostornu gustoću naboja zapisanu linearnom jednadžbom $\rho(r) = 10^{-9} \cdot \frac{r}{a} \left(\frac{\text{C}}{\text{m}^3} \right)$. Potrebno je izračunati jakost električnog polja u oblaku na udaljenosti $b = \frac{a}{2} = 5$ cm od središta.

22.a) Rješenje: Zadatak se rješava pomoću Gaussovog zakona što znači da vrijedi

$$\text{sljedeća jednakost: } \int_A \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\int_V \rho \cdot dV}{\epsilon_0}.$$

Kako je $\vec{E} = \vec{r}_0 \cdot E$, $d\vec{S} = \vec{r}_0 \cdot dS$, $dV = 4\pi r^2 \cdot dr$ slijedi da je

$$E \cdot 4\pi \cdot 25 \cdot 10^{-4} = \frac{10^{-9} \cdot \int_0^r \frac{r}{a} \cdot 4\pi r^2 \cdot dr}{\epsilon_0} \text{ i dalje } E \cdot 4\pi \cdot 25 \cdot 10^{-4} = \frac{10^{-9} \cdot 4\pi}{\epsilon_0 \cdot a} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^{5 \cdot 10^{-2}}$$

$$E \cdot 25 \cdot 10^{-4} = \frac{10^{-9} \cdot 625 \cdot 10^{-8}}{\epsilon_0 \cdot a \cdot 4} \text{ i dalje } E = \frac{10^{-13} \cdot 25 \cdot 36 \cdot \pi}{10^{-9} \cdot 0,1 \cdot 4} = 706,85 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$$

23.) Polumjer vodiča koaksijalnog kabla je 2 mm. Unutarnji polumjer uzemljenog oklopa je 8 mm. Potrebno je izračunati polumjer ekvipotencijalne plohe na kojoj je potencijal 5 kV ako je vodič na potencijalu 10 kV.

23.a) Rješenje: $E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$

Napon između vodiča i plašta se izrazi kao: $U = 10\text{kV} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{pl}}{r_v}$

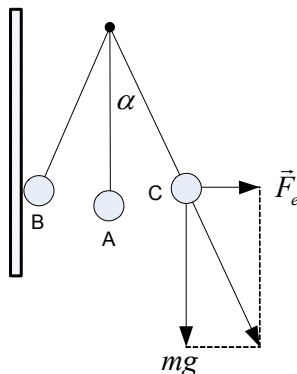
Napon između vodiča i ekvipotencijalne plohe se izrazi kao:

$$U_{ekv} = 5\text{kV} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{ekv}}{r_v} \quad \text{pa je:} \quad \frac{U}{U_{ekv}} = 2 = \frac{\ln \frac{r_{pl}}{r_v}}{\ln \frac{r_{ekv}}{r_v}}$$

$$\ln \frac{r_{pl}}{r_v} = 2 \cdot \ln \frac{r_{ekv}}{r_v} = \ln \frac{r_{ekv}^2}{r_v^2} \quad ; \quad \text{odatle slijedi da mora biti:}$$

$$\frac{r_{pl}}{r_v} = \frac{r_{ekv}^2}{r_v^2} \Rightarrow r_{pl} \cdot r_v = r_{ekv}^2 \quad r_{ekv} = \sqrt{r_v \cdot r_{pl}} = \sqrt{2 \cdot 8} = 4\text{mm}$$

24.) Jednoliko nabijena ploča stvara pred sobom homogeno polje jakosti E. Kad je u polje unesena nenabijena vodljiva kuglica mase m obješena o nit izolatora, kuglica iz položaja A prvo biva privučena u položaj B (gdje se nabije nabojem q), a zatim odbijena ostane u položaju C. Ako je u tom položaju nit otklonjena za kut α od početnog položaja, kolika je jakost polja E ? ($m=0,5\text{ g}$; $q=1\text{ nAs}$; $\alpha = 15^\circ$?



24.a) Rješenje:

$$F_e = mg \cdot \tan \alpha = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 0,268 = 0,00134\text{ N}$$

$$\text{Jakost električnog polja mora biti: } E = \frac{F_e}{q} = \frac{0,00134}{1 \cdot 10^{-9}} = 134 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

**PRIJELAZ ELEKTRIČNOG POLJA NA GRANICI DVAJU DIELEKTRIKA,
KAPACITET, RAD I ENERGIJA U ELEKTRIČNOM POLJU**

25.) Dvije metalne paralelne ploče na razmaku $d=5\text{cm}$ priključene su na napon $U=120\text{ V}$. Treba odrediti plošnu gustoću naboja ako se između ploča nalazi

a) vakuum

b) dielektrik s $\varepsilon_r = 2,5$

25.a) Rješenje:

Između ploča postoji homogeno električno polje jakosti

$$E = \frac{U}{d} = \frac{120}{5 \cdot 10^{-2}} = 2400 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Plošna gustoća iznosi:

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 \cdot E = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2400 = 21,24 \text{ nC/m}^2$$

25.b) Rješenje: $\sigma_2 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2,5 \cdot 2400 = 21,24 \cdot 2,5 = 53,1 \text{ nC/m}^2$

26.) Treba odrediti polumjer vanjske sfere kuglastog kondenzatora, tako da će kod priključenog napona $U = 50\text{ kV}$ između sfera, jakost električnog polja na unutarnjoj sferi biti jednaka 1 MV/m . Polumjer unutarnje sfere je 15 cm .

26.a) Rješenje:

Jakost polja na unutarnjoj sferi zapisuje se kao:

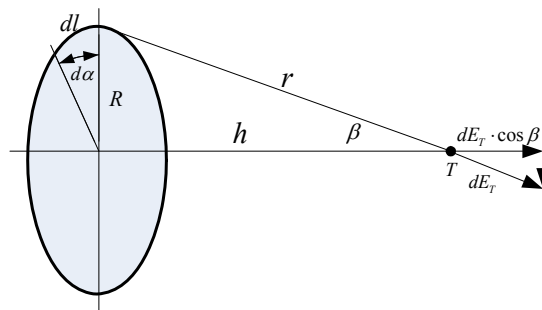
$$E_u = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_u^2} = 10^6 \quad ; \quad \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} = 10^6 \cdot r_u^2$$

$$\text{Napon između sfera zapisan je kao : } U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_u} - \frac{1}{r_v} \right) = 10^6 \cdot r_u^2 \cdot \left(\frac{1}{r_u} - \frac{1}{r_v} \right) = 50 \cdot 10^3$$

Iz toga slijedi $r_v = 22,5\text{ cm}$

27.) Naboj kružnog prstena:

Potrebno je izvesti izraz za jakost električnog polja i potencijala u točki T prema slici, za naboj koji je jednoliko raspodijeljen na kružnom prstenu.



27a.) Rješenje: Ako je ukupni naboj na prstenu označen s Q, naboj elementa dl izražava se kao: $dQ = \frac{Q \cdot dl}{2\pi R}$. Može se tretirati kao točkasti. Jakost polja dE u točki T izražava se

$$\text{kao:} \quad dE_T = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{Q \cdot dl}{2R\pi \cdot 4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{Q \cdot dl}{8\pi^2 \epsilon_0 \cdot R \cdot r^2}$$

Radikalne komponente polja se poništavaju, a aksijalna je jednaka:

$$dE = dE_T \cdot \cos \beta = dE_T \cdot \frac{h}{r}$$

$$dE = \frac{Q \cdot dl}{8\pi^2 \epsilon_0 \cdot R \cdot r^2} \cdot \frac{h}{r} = \frac{Q \cdot dl \cdot h}{8\pi^2 \epsilon_0 \cdot R \cdot r^3} = \frac{Q \cdot R \cdot d\alpha \cdot h}{8\pi^2 \epsilon_0 \cdot R \cdot r^3} = \frac{Q \cdot h \cdot d\alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 \cdot r^3}$$

$$\text{Ukupna jakost električnog polja je jednaka: } E = \int_0^{2\pi} \frac{Q \cdot h}{8\pi^2 \epsilon_0 r^3} d\alpha = \frac{Q \cdot h \cdot 2\pi}{8\pi^2 \epsilon_0 r^3} = \frac{Q \cdot h}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3}$$

Kako je $r^3 = (R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}$ slijedi izraz za jakost električnog polja kružnog prstena:

$$E = \frac{Q \cdot h}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{gdje je E jedina preostala aksijalna komponenta jakosti}$$

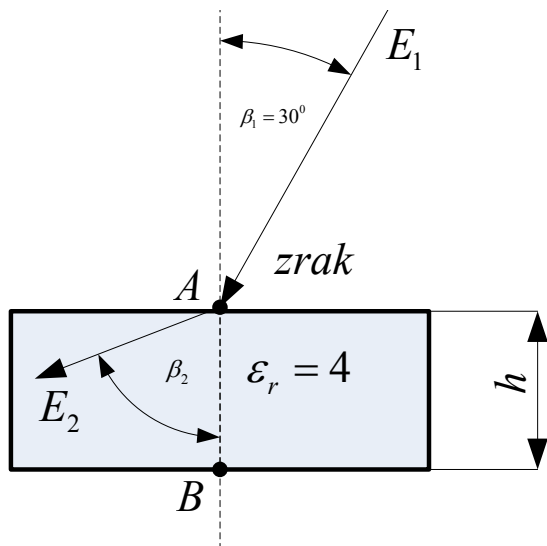
električnog polja. Za $h=0$ i $E=0$ jer u ravni i središtu prstena postoje samo radikalne komponente koje se ponište. Ako se naboj izrazi kao gustoća krivulje, tj. $Q = \lambda \cdot 2R\pi$, slijedi:

$$E = \frac{\lambda \cdot 2R\pi \cdot h}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda \cdot R \cdot h}{2\epsilon_0 (R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{As \cdot m \cdot m}{m \cdot \frac{As}{Vm} \cdot m^3} = \frac{As \cdot m^3 \cdot V}{As \cdot m^4} = \frac{V}{m} \right] \Rightarrow$$

$$\text{potencijal naboja kružnog prstena: } \varphi = \frac{\lambda \cdot R}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{(R^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Za $h=0$ slijedi $E=0$, a iz izraza za potencijal na osi i ravni prstena slijedi: $\varphi = \frac{\lambda}{2\epsilon_0}$

28.) Pod kutom $\beta_1 = 30^\circ$, prema normali na plohu dielektrika s $\epsilon_r = 4$, uspostavljeno je homogeno električno polje jakosti $E_1 = 100 \frac{\text{V}}{\text{m}}$. Treba odrediti napon između točaka A i B prema slici, ako je $h = 1 \text{ cm}$.



28.a) Rješenje:

Napon između točaka A i B jednak je: $U_{AB} = \int_A^B E \cdot dl = E_2 \cdot \cos \beta_2 \cdot h$

$$\epsilon_1 \cdot E_1 \cdot \cos \beta_1 = \epsilon_2 \cdot E_2 \cdot \cos \beta_2; \quad E_2 \cdot \cos \beta_2 = \frac{\epsilon_1 \cdot E_1 \cdot \cos \beta_1}{\epsilon_2}$$

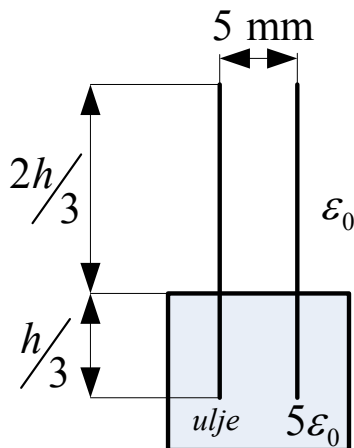
$$U_{AB} = \frac{\epsilon_1 \cdot E_1 \cdot h \cdot \cos \beta_1}{\epsilon_2} = \frac{1 \cdot 100 \cdot 0,01 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{4} = 0,216 \text{ V}$$

Kut β_2 se izračuna iz izraza :

$$\frac{\tan \beta_1}{\tan \beta_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}; \quad \beta_2 = 66,58^\circ$$

29.) Zračni pločasti kondenzator djelomično je potopljen u ulje koje ima $\varepsilon_r = 5$.

Površina ploče kondenzatora je 25 cm^2 , a razmak ploča 5 mm . Koliki je kapacitet dotičnog kondenzatora?



29.a) Rješenje: Ukupni kapacitet jednak je zbroju kapaciteta dijela kondenzatora koji je potopljen i dijela kondenzatora koji je u zraku (paralelni spoj).

$$C_u = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 \cdot S_{zr}}{d} + \frac{5 \cdot \varepsilon_0 \cdot S_{ulja}}{d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5 \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{d} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3} \right) = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d} \cdot \frac{7}{3}$$

$$C_u = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 25 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{7}{3} = 10,325 \cdot 10^{-12} = 10,325 \text{ pF}$$

30.) U dielektriku s probojnom čvrstoćom $E_c = 15 \text{ MV/m}$ raspodjela potencijala dana je jednadžbom: $\varphi(x, y) = (4x - 3y - 4) \cdot 10^6$. Mjerna jedinica za koordinate je x i y metar. Koliko puta je stvarna jakost električnog polja manja od probojne?

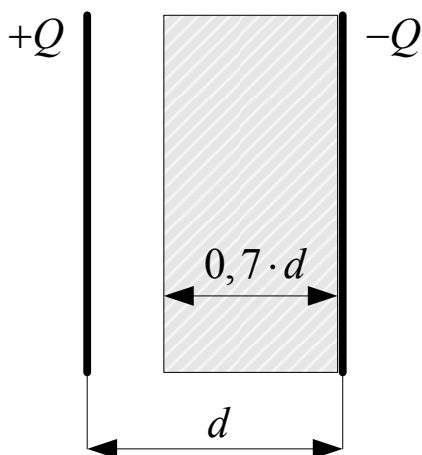
30.a) Rješenje: Jakost električnog polja je s potencijalom povezana izrazom:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = (-4\vec{i} + 3\vec{j}) \frac{\text{MV}}{\text{m}}; \quad \text{Apsolutni iznos jakosti električnog polja iznosi:}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \frac{\text{MV}}{\text{m}};$$

To znači da je stvarna jakost električnog polja 3 puta manja od probojne.

31.) Između ploča nabijenog zračnog pločastog kondenzatora paralelno s pločama se umetne listić relativne dielektrične konstante $\epsilon_r = 9$. Listić ispuni 70% prostora između ploča. Za koliko posto se smanji akumulacija električne energije u polju kondenzatora?



31.a) Rješenje: Akumulirana električna energija bez listića izrazi se kao:

$$W_1 = \frac{Q^2}{2 \cdot C_1}; \quad C_1 = \frac{\epsilon_0 \cdot S}{d}$$

Akumulirana električna energija s listićem izrazi se kao:

$$W_2 = \frac{Q^2}{2 \cdot C_2}, \quad \text{pri čemu je:}$$

$$C_2 = \frac{\frac{\epsilon_0 \cdot S}{0,3 \cdot d} + \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot S}{0,7 \cdot d}}{\frac{\epsilon_0 \cdot S}{0,3 \cdot d} + \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot S}{0,7 \cdot d}} = \frac{\frac{\epsilon_0 \cdot S}{0,3 \cdot d} + \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot S}{0,7 \cdot d}}{\frac{0,7 \cdot \epsilon_0 \cdot S + 0,3 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot S}{0,21 \cdot d}} = \frac{\epsilon_0 \cdot S \cdot \epsilon_r}{d \cdot (0,7 + 0,3 \cdot \epsilon_r)}$$

$$C_2 = C_1 \cdot \frac{\epsilon_r}{0,7 + 0,3 \cdot \epsilon_r} = 2,64 \cdot C_1$$

$$W_2 = \frac{Q^2}{2 \cdot C_2} = \frac{Q^2}{2 \cdot 2,64 \cdot C_1} = W_1 \cdot 0,378 \text{ što znači da je smanjenje akumulirane energije}$$

$$\Delta W = 0,622 \cdot W_1 \text{ ili } 62,2\%. (\Delta W\% = \frac{\Delta W}{W_1} \cdot 100)$$

31.b) Rješenje – drugi način:

$$W_1 = \frac{D^2}{2 \cdot \varepsilon} \cdot V; \quad V - \text{volumen dielektrika}$$

$$W_1 = \frac{D^2}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot V; \rightarrow \text{kada između ploča nema listića}$$

Ako listić ispuni 70% prostora onda je i $V_1 = 0,7 V$ i $V_{zr} = 0,3 V$ (V_1 = volumen listića, V_{zr} = volumen zraka) pa je:

$$\begin{aligned} W_2 &= W_{2l} + W_{2zr} = \frac{D^2 \cdot 0,7V}{2\varepsilon_0 \cdot 9} + \frac{D^2 \cdot 0,3V}{2\varepsilon_0} \\ &= \frac{D^2 \cdot 0,7V + 2,7 \cdot D^2 \cdot V}{18 \cdot \varepsilon_0} = \frac{3,4 \cdot D^2 \cdot V}{18 \cdot \varepsilon_0} \end{aligned}$$

$$\Delta W = W_1 - W_2 = \frac{D^2 \cdot V}{2 \cdot \varepsilon_0} - \frac{3,4 \cdot D^2 \cdot V}{18 \cdot \varepsilon_0} = \frac{9 \cdot D^2 \cdot V - 3,4 \cdot D^2 \cdot V}{18 \cdot \varepsilon_0} = \frac{5,6 \cdot D^2 \cdot V}{18 \cdot \varepsilon_0}$$

$$\Delta W\% = \frac{\Delta W}{W_1} \cdot 100 = \frac{\frac{5,6 D^2 \cdot V}{18 \cdot \varepsilon_0}}{\frac{D^2 \cdot V}{2 \cdot \varepsilon_0}} \cdot 100 = \frac{5,6 D^2 \cdot V \cdot 2 \cdot \varepsilon_0}{9 \cdot 18 \cdot \varepsilon_0 \cdot D^2 \cdot V} \cdot 100 = \frac{5,6}{9} \cdot 100$$

$$\Delta W\% = \frac{560}{9} = 62,2\%$$

32.) Zračni vod čine dva paralelna vodiča polumjera $r=3$ mm, međusobne udaljenosti $d=40$ cm i priključena na napon $U=250$ V. Potrebno je izračunati iznos jakosti električnog polja na površini vodiča. (Ekscentricitet se može zanemariti, uzimajući u obzir da je $d \gg r$.)

32.) Rješenje:

Napon između dva vodiča se izrazi pomoću linijskog naboja kao:

$$U = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{d-r}{r} \approx \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{d}{r} \quad (\text{izraz izveden na predavanju})$$

Iz izraza za napon može se izraziti:
$$\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} = \frac{U}{\ln \frac{d}{r}}$$

Jakost polja na površini vodiča je jednaka: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_1 \cdot \vec{i} + E_2 \cdot \vec{i} = (E_1 + E_2) \cdot \vec{i}$

To znači da je:
$$E = E_1 + E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$E \approx \frac{U}{2 \cdot r \cdot \ln \frac{d}{r}} \approx \frac{250}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot \ln \frac{400}{3}} \approx \frac{250 \cdot 10^3}{6 \cdot 4,89} \approx 8520,79 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

33.) Iznad zemlje na visini $h = 10$ m obješen je vodič polumjera $r = 2$ cm i dužine $l = 10$ km. Između vodiča i zemlje vlada napon $U = 150$ kV. Potrebno je izračunati akumuliranu energiju u električnom polju sustava vodič-zemlja.

33.) Rješenje:

$$W = \frac{\lambda \cdot l \cdot U}{2} = \frac{c \cdot U^2 \cdot l}{2}$$

Kapacitet vodiča prema zemlji izračunavamo prema poznatom izrazu:

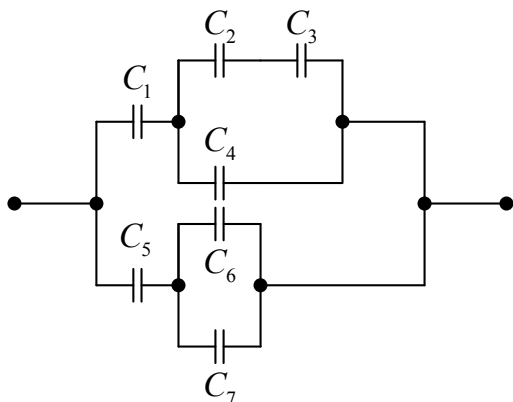
$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2 \cdot h}{r}}, \text{ pa je } W = \frac{2\pi\epsilon_0 \cdot l \cdot U^2}{2 \cdot \ln \frac{2 \cdot h}{r}}$$

$$W = \frac{\pi\epsilon_0 \cdot l \cdot U^2}{\ln \frac{2 \cdot h}{r}} = \frac{\pi \cdot 10^{-9} \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot (150 \cdot 10^3)^2}{36\pi \cdot \ln \frac{20}{2 \cdot 10^{-2}}}$$

$$W = \frac{10^{-5} \cdot 22500 \cdot 10^6}{36 \cdot 6,91} = \frac{225000}{36 \cdot 6,91} = 904,5 \text{ J}$$

SPOJEVI S KONDENZATORIMA

34.) Za spoj prema slici treba odrediti ekvivalentni kapacitet, ako je zadano:



$C_1=2 \text{ nF}$; $C_2=3 \text{ nF}$; $C_3=9 \text{ nF}$; $C_4=3,75 \text{ nF}$; $C_5=3 \text{ nF}$; $C_6=4 \text{ nF}$; $C_7=8 \text{ nF}$.

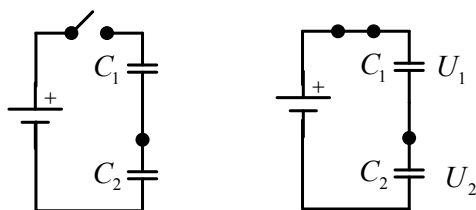
34.) Rješenje:

$$C_{23} = \frac{3 \cdot 9}{12} = 2,25 \text{ nF}; \quad C_{234} = 2,25 + 3,75 = 6 \text{ nF}; \quad C_{1234} = \frac{6 \cdot 2}{8} = 1,5 \text{ nF}$$

$$C_{67} = 12 \text{ nF}; \quad C_{567} = \frac{12 \cdot 3}{15} = 2,4 \text{ nF}$$

$$\text{Ekvivalentni kapacitet je: } C_{ekv} = C_{1234} + C_{567} = 1,5 + 2,4 = 3,9 \text{ nF}$$

35.) Zadan je serijski spoj dvaju kondenzatora jednakih kapaciteta, $C_1 = C_2 = C$, od kojih je C_1 prethodno nabijen na napon $2U$, a C_2 nenabijen. Koliki će biti naponi na C_1 i C_2 nakon priključenja spoja na izvor napona U ?



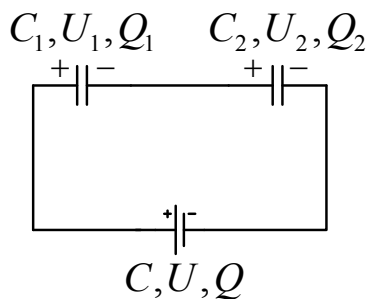
35.) Rješenje: Za točku 1 vrijedi: $C \cdot 2 \cdot U + 0 = C \cdot U_1 + C \cdot U_2$

Za petlju vrijedi: $U + U_1 - U_2 = 0$

Iz dvije linearne jednadžbe slijedi da je: $U_1 = \frac{U}{2}$; $U_2 = \frac{3U}{2}$

Polariteti napona na kondenzatorima nakon zatvaranja sklopke su pretpostavljeni. Budući da su dobiveni rezultati pozitivni, pretpostavka je bila točna.

36.) Kondenzatori kapaciteta $C_1=10\mu\text{F}$ i $C_2=15\mu\text{F}$ spojeni su serijski na napon izvora $U = 100\text{ V}$. Potrebno je izračunati napone i naboje pojedinih kondenzatora.



36.) Rješenje: Ekvivalentni (ukupni) kapacitet spoja je:

$$C_{ekv} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{10 \cdot 15}{25} = 6 \mu\text{F}$$

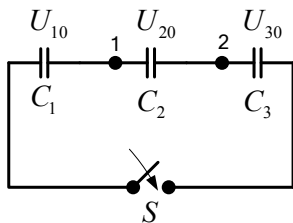
$$\text{Naboj izvora je: } Q = C_{ekv} \cdot U = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

Zbog influencije, naboj Q je i na oba kondenzatora pa slijedi:

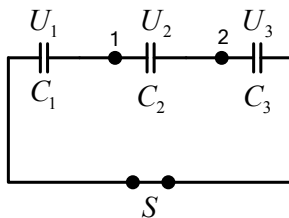
$$C_1 \cdot U_1 = C_2 \cdot U_2 = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \cdot U, \text{ iz čega je: } U_1 = U \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2} = 100 \cdot \frac{15}{25} = 60 \text{ V}$$

$$U_2 = U \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 100 \cdot \frac{10}{25} = 40 \text{ V}$$

37.) Treba odrediti napone U_1, U_2, U_3 koji se pojave na kondenzatorima nakon zatvaranja sklopke S, ako su prije toga kondenzatori bili nabijeni, tako da su na njima vladali naponi: $U_{10} = 20 \text{ V}$ $C_1 = 6 \text{ nF}$; $U_{20} = 40 \text{ V}$ $C_2 = 8 \text{ nF}$; $U_{30} = 60 \text{ V}$ $C_3 = 12 \text{ nF}$



Sl. 1



Sl. 2

37.a) Rješenje:

$$\sum_{i=1}^n Q_{prije} = \sum_{i=1}^n Q_{poslije} \quad \text{za svaku točku}$$

$$\text{Za točku 1 vrijedi: } -U_{10} \cdot C_1 + U_{20} \cdot C_2 = -U_1 C_1 + U_2 C_2$$

$$\text{Za točku 2 vrijedi: } -U_{20} \cdot C_2 + U_{30} \cdot C_3 = -U_2 C_2 + U_3 C_3 \quad \text{i} \quad U_1 + U_2 + U_3 = 0$$

$$\text{Točka 1: } -20 \cdot 6 + 40 \cdot 8 = -U_1 \cdot 6 + U_2 \cdot 8 \Rightarrow -120 + 320 = -6U_1 + 8U_2; \quad 200 = 8U_2 - 6U_1$$

Točka 2: .

$$-6U_1 + 8U_2 = 200$$

$$12U_3 - 8U_2 = 400$$

$$U_1 + U_2 + U_3 = 0 \Rightarrow U_2 = -U_1 - U_3$$

$$-6U_1 + 8(-U_1 - U_3) = 200$$

$$12U_3 - 8(-U_1 - U_3) = 400$$

$$-6U_1 - 8U_1 - 8U_3 = 200$$

$$12U_3 + 8U_1 + 8U_3 = 400$$

$$-14U_1 - 8U_3 = 200 \quad / \cdot 2,5$$

$$8U_1 + 20U_3 = 400$$

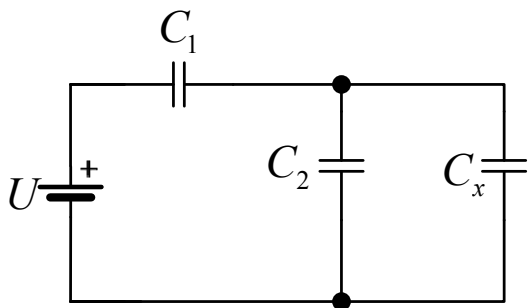
$$-35U_1 - 20U_3 = 500$$

$$8U_1 + 20U_3 = 400 \quad / + \Rightarrow -27U_1 = 900 \Rightarrow U_1 = -33,33 \text{ V}$$

$$U_3 = \frac{1}{20} \cdot \left(400 + 8 \cdot \frac{100}{3} \right) = \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{1200}{3} + \frac{800}{3} \right) =$$

$$\frac{1}{20} \cdot \frac{2000}{3} = \frac{100}{3} = 33,33 \text{ V} \quad \text{Iz } U_1 + U_2 + U_3 = 0 \Rightarrow U_2 = 0$$

38.) U spoju prema slici treba odrediti C_x tako da energija prvog kondenzatora bude jednaka energiji drugog kondenzatora ako je: $C_1 = 4 \mu\text{F}$; $C_2 = 1 \mu\text{F}$.



38.a) Rješenje: Izraz za energiju kondenzatora je: $W_c = \frac{C \cdot U^2}{2}$ pa je:

$$W_{c1} = \frac{C_1 \cdot U_1^2}{2}; \quad W_{c2} = \frac{C_2 \cdot U_2^2}{2}$$

Iz uvjeta da je: $W_{c1} = W_{c2}$ slijedi da mora biti: $4U_1^2 = U_2^2$; $U_2 = 2U_1$

Iz slike je vidljivo da je:

$$U_1 = U \cdot \frac{C_2 + C_x}{C_1 + C_2 + C_x} = \frac{U \cdot (1 + C_x)}{5 + C_x} \quad (\text{kapacitivni djeliteľ napona})$$

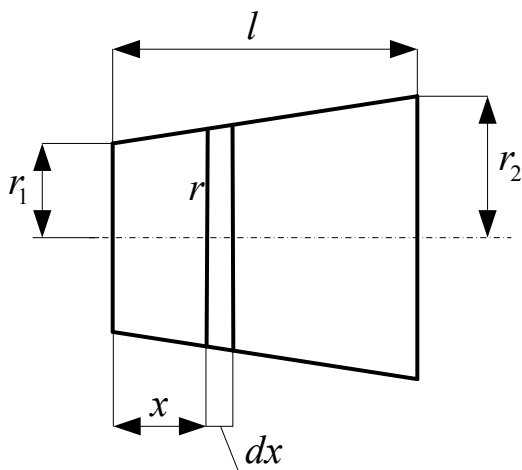
$$U_2 = U \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_x} = \frac{U \cdot 4}{5 + C_x}.$$

Dijeljenjem jednađbi proizlazi da je:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 + C_x}{4}; \quad 4 = 2 + 2C_x; \quad C_x = 1 \mu\text{F}$$

STRUJNI KRUG ISTOSMJERNE STRUJE

39.) Koliki je otpor vodiča duljine l i provodnosti χ čiji je oblik prikazan na slici?



39.a) Rješenje: Vodič ima promjenljivi presjek koji je funkcija udaljenosti x od lijeve

baze. Otpor vodiča je: $R = \frac{U_{12}}{I} = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}{I}$. U ovom slučaju je $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot dl$ i $dl = dx$, ako

se jakost polja izrazi kao: $E = \frac{J}{\chi} = \frac{I}{S \cdot \chi}$, slijedi da je: $R = \frac{1}{\chi} \cdot \int_1^2 \frac{dx}{S}$, gdje je $S = r^2 \cdot \pi$.

Iz slike je vidljivo da je: $\frac{r_2 - r_1}{l} = \frac{r - r_1}{x}$.

Iz toga slijedi da je: $r = \frac{r_2 - r_1}{l} \cdot x + r_1$,

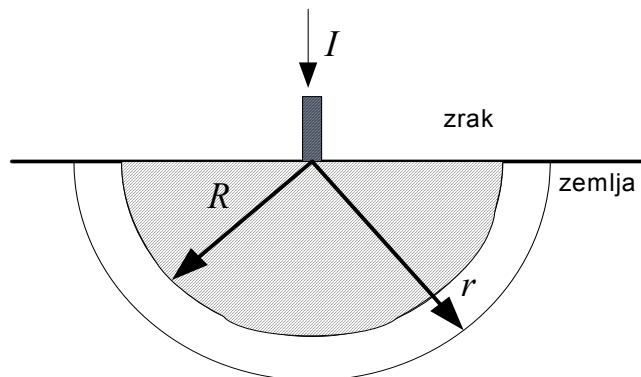
$$\text{te je: } R = \frac{1}{\chi \cdot \pi} \cdot \int_0^l \frac{dx}{\left(\frac{r_2 - r_1}{l} \cdot x + r_1 \right)^2} = \frac{l}{\pi \cdot \chi \cdot r_1 \cdot r_2}$$

Integral se riješi uvođenjem zamjene: $u = \frac{r_2 - r_1}{l} \cdot x + r_1$

Ako je $r_1 = r_2 = r$ izraz prelazi u $R = \frac{l}{\chi \cdot r^2 \cdot \pi} = \frac{\rho \cdot l}{S}$ što, naravno, predstavlja otpor vodiča pri kojem su χ i S konstante.

40.) Potrebno je izvesti izraz za otpor uzemljenja izvedenog s metalnom polukuglom polumjera R.

40.a) Rješenje: Strujnice se iz polukugle u zemlju šire radialno. Površina sfere polukugle na polumjeru r iznosi: $S = 2 \cdot r^2 \cdot \pi$ pa gustoća struje na toj sferi iznosi: $J = \frac{I}{2 \cdot r^2 \cdot \pi}$.



Prema Ohmovom zakonu u diferencijalnom obliku jakost električnog polja je:

$$E = \frac{J}{\chi} = \frac{I}{2 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \chi}.$$

Potencijal usamljene polukugle iznosi:

$$\varphi_k = \int_R^{\infty} E \cdot dr = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \chi} \cdot \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \chi} \cdot \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_R^{\infty} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \chi \cdot R}$$

Otpor uzemljenja izvedenog s polukuglom iznosi: $R_{uz} = \frac{\varphi_k}{I} = \frac{1}{2\pi\chi R}.$

| | |
|---|-------------------------|
| Specifični otpor tla iznosi: Vlažan humus | 10 Ωm |
| Suhi humus | 100 Ωm |
| Sitan vlažan pijesak | 100 Ωm |
| Sitan suhi pijesak | 10^3 Ωm |
| Suhi beton | 10^5 Ωm |

41.) Kroz uzemljivač koji je izveden s polukuglom teče struja $I = 100 \text{ A}$. Neka je vodljivost tla $\chi = 0,01 \frac{\text{S}}{\text{m}}$. Ako je duljina koraka čovjeka $d = 0,75 \text{ m}$, na kojoj udaljenosti od uzemljivača će se pojaviti opasan napon koraka od 100 V ?

41.a) Rješenje:

Napon, koji će se pojaviti na površini zemlje između dvije ekvipotencijalne plohe, iznosi

$$U = \frac{I}{2\pi\chi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{I}{2\pi\chi} \left(\frac{1}{r-d} - \frac{1}{r} \right),$$

gdje je s r označen vanjski polumjer, do kojeg je sigurno približiti se. Slijedi da je:

$$100 = \frac{100}{2 \cdot \pi \cdot 0,01} \cdot \left(\frac{1}{r-d} - \frac{1}{r} \right).$$

Nepoznanica je r koja se izračuna iz pripadne jednadžbe; $r = 3,85 \text{ m}$, što znači da je to udaljenost od središta polukugle na koju je sigurno približiti se, a da napon koraka (na razmaku od $0,75 \text{ m}$) ne bude veći od 100 V .

$$\text{Potencijal na } r = 3,85 \text{ m iznosi: } \varphi_{3,85\text{m}} = \frac{100 \cdot 100}{2 \cdot \pi \cdot 3,85} = 413,4 \text{ V}$$

$$\text{Potencijal na } r-d = 3,10 \text{ m iznosi: } \varphi_{3,10\text{m}} = \frac{100 \cdot 100}{2 \cdot \pi \cdot 3,10} = 513,4 \text{ V}$$

$$\text{Napon koraka na tom mjestu iznosi: } U_{0,75\text{m}} = 513,4 - 413,4 = 100 \text{ V}$$

42.) U zimskom razdoblju bakreni vodič ima temperaturu -10°C i otpor $2,75\ \Omega$. Koliki će biti njegov otpor u ljetnom razdoblju na temperaturi 40°C ako je $\alpha = 0,00394\ \text{K}^{-1}$?

42.) Rješenje:

Ovisnost otpora o temperaturi je dana izrazom: $R_t = R_0(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$, gdje je R_0 otpor pri 20°C . Zato je: $R_{(-10^{\circ}\text{C})} = R_0 \cdot [1 + \alpha \cdot (-10 - 20)] = R_0 \cdot (1 - 30 \cdot \alpha)$

$$R_{40^{\circ}\text{C}} = R_0 \cdot (1 + 20 \cdot \alpha)$$

Dijeljenjem jednačbi proizlazi:

$$\frac{R_{40^{\circ}\text{C}}}{R_{(-10^{\circ}\text{C})}} = \frac{1 + 20 \cdot \alpha}{1 - 30 \cdot \alpha}; \quad R_{40^{\circ}\text{C}} = R_{(-10^{\circ}\text{C})} \cdot \frac{1 + 20 \cdot \alpha}{1 - 30 \cdot \alpha} = 2,75 \cdot 1,2227 = 3,36\ \Omega$$

Specifične vodljivosti i temperaturni koeficijenti nekih materijala pri 20°C

| Materijal | $\chi \left[\frac{\text{S} \cdot \text{m}}{\text{mm}^2} \right]$ | $\alpha \left[\frac{1}{^{\circ}\text{K}} \right]$ |
|------------|---|--|
| Aluminij | 35 | +0,0043 |
| Bakar | 57 | +0,0039 |
| Cekas | 0,93 | 0,00019 |
| Manganin | 2,14 | 0,000015 |
| Konstantan | 2,1 | -0,00003 |

43.) Od istog volumena određenog materijala otpornosti ρ načinjena su dva cilindrična vodiča. Prvi ima presjek S , a drugi $2S$. Koji je odnos otpora vodiča?

A) $R_1 = R_2$; B) $R_1 = 2R_2$; C) $R_1 = 4R_2$; D) $R_1 = 8R_2$?

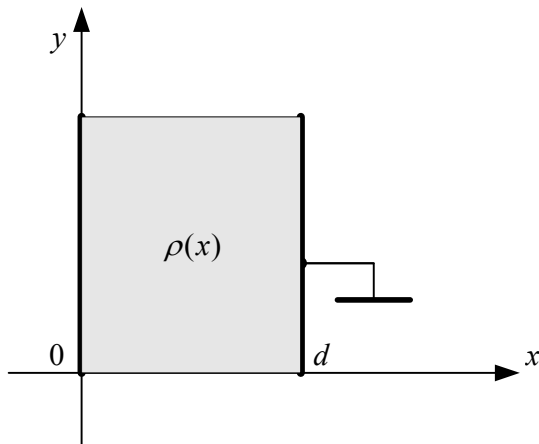
43.a) Rješenje:

Volumen $V = \text{const.}$, pa je $S \cdot l_1 = 2S \cdot l_2$, što znači da duljina vodiča l_2 može

iznositi: $l_2 = \frac{S \cdot l_1}{2 \cdot S} = \frac{l_1}{2}$. Otpor vodiča 1 iznosi: $R_1 = \frac{\rho \cdot l_1}{S}$, a otpor vodiča 2 iznosi:

$$R_2 = \frac{\rho \cdot l_2}{2 \cdot S} = \frac{\rho}{2 \cdot S} \cdot \frac{l_1}{2} = \frac{\rho \cdot l_1}{4 \cdot S} = \frac{1}{4} \cdot R_1 \quad \text{ili} \quad R_1 = 4R_2$$

44.) Između ravnih ploča $x = 0$ i $x = d = 1 \text{ cm}$ je vodljiva materija čija se otpornost mijenja prema: $\rho(x) = \rho_0 \cdot e^{\frac{x}{d}}$, pri čemu je $\rho_0 = 200 \text{ } \Omega\text{m}$. Desna ploča je uzemljena a lijeva na potencijalu $\varphi = 15 \text{ V}$. Treba odrediti koordinatu x ekvipotencijalne plohe s potencijalom $\varphi' = 5 \text{ V}$.



44.a) Rješenje: Napon na elementu dx iznosi: $dU = E \cdot dx = J \cdot \rho_x \cdot dx$. Napon između

ploča (koji iznosi 15 V) se izračuna iz: $U = \int_0^d J \cdot \rho_0 \cdot e^{\frac{x}{d}} \cdot dx = J \cdot \rho_0 \cdot d \cdot (e - 1) = 15 \text{ V}$

Napon između lijeve ploče i ekvipotencijalne plohe s potencijalom 5 V je:

$$U_{10} = J \cdot \rho_0 \cdot \int_0^x e^{\frac{x}{d}} \cdot dx = J \cdot \rho_0 \cdot d \cdot (e^{\frac{x}{d}} - 1) = 10 \text{ V}$$

Dijeljenjem jednačbi proizlazi: $\frac{3}{2} = \frac{e-1}{e^{\frac{x}{d}}-1}$; $3 \cdot e^{\frac{x}{d}} - 3 = 2 \cdot e - 2$; $3 \cdot e^{\frac{x}{d}} = 2 \cdot e + 1$

$$e^{\frac{x}{d}} = \frac{2 \cdot e + 1}{3} = 2,1455; \quad \frac{x}{d} = 0,763; \quad x = 0,763 \text{ cm}.$$

Općenito za potencijal neke ekvipotencijalne plohe vrijedi: $\varphi_x = - \int_{x_{ref}}^x J \cdot \rho_0 \cdot e^{\frac{x}{d}} \cdot dx$.

U ovom slučaju za $x_{ref} = d$ je $\varphi_x = - \int_d^x J \cdot \rho_0 \cdot e^{\frac{x}{d}} \cdot dx = \int_x^d J \cdot \rho_0 \cdot e^{\frac{x}{d}} \cdot dx = J \cdot \rho_0 \cdot d \cdot (e - e^{\frac{x}{d}})$

Zato je potencijal lijeve ploče ($x = 0$) $\varphi_{(x=0)} = 15 = J \cdot \rho_0 \cdot d \cdot (e - 1)$

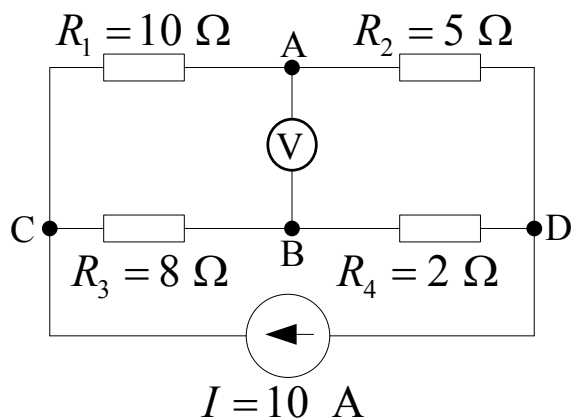
Potencijal ploče sa $\varphi = 5 \text{ V}$ je: $5 = J \cdot \rho_0 \cdot d \cdot (e - e^{\frac{x}{d}})$

Dijeljenjem jednačbi je opet: $\frac{15}{5} = \frac{e-1}{e-e^{\frac{x}{d}}} = 3$; $e-1 = 3e-3e^{\frac{x}{d}}$; $3e^{\frac{x}{d}} = 2e+1$

$$e^{\frac{x}{d}} = \frac{2e+1}{3}.$$

LINEARNE ELEKTRIČNE MREŽE ISTOSMJERNE STRUJE

45.) Koliki napon mjeri idealni V-metar u spoju prema slici?



45.a) Rješenje:

Napon U_{AB} je jednak razlici potencijala točke A i točke B. Budući da R_1 i R_3 imaju zajedničku referentnu točku C, a R_4 i R_2 točku D, potencijale u točkama A i B je moguće izraziti na dva načina i to:

S obzirom na referentnu točku C slijedi: $U_{AB} = -I_{12} \cdot R_1 - (-I_{34} \cdot R_3)$

S obzirom na referentnu točku D slijedi: $U_{AB} = I_{12} \cdot R_2 - I_{34} \cdot R_4$

$$\text{Struja } I_{12} = I \cdot \frac{R_{34}}{R_{34} + R_{12}} = 10 \cdot \frac{10}{25} = 4 \text{ A}; \quad \text{Struja } I_{34} = I \cdot \frac{R_{12}}{R_{12} + R_{34}} = 10 \cdot \frac{15}{25} = 6 \text{ A}$$

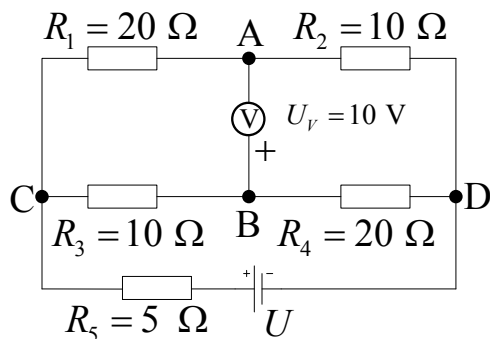
Zato je:

$$U_{AB} = -4 \cdot 10 + 6 \cdot 8 = 8 \text{ V}$$

$$U_{AB} = 4 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 8 \text{ V}$$

Stezaljka A je plus (+), a stezaljka B minus(-).

46.) Koliki je napon izvora U ako V-metar pokazuje u spoju, prema slici, napon $U_V = 10 \text{ V}$, označenog polariteta?



46.a) **Rješenje:** Najprije je potrebno izračunati ukupni otpor spoja:

$$R_{uk} = 5 + \frac{30 \cdot 30}{60} = 20 \Omega; \text{ Ukupna struja je tada: } I = \frac{U}{20}$$

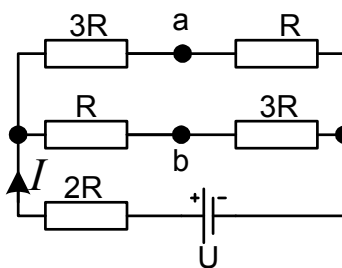
Struja grane $I_{12} = \frac{U}{20} \cdot \frac{30}{60} = \frac{U}{40}$; $I_{34} = \frac{U}{40}$ (strujni djeljitelj). Struje grana su iste jer su otpori grana isti.

Napon V-metra iznosi: $U_V = \varphi_B - \varphi_A = \frac{U}{40} \cdot R_4 - \frac{U}{40} \cdot R_2$ (s obzirom na označeni polaritet)

$$U_V = \frac{U}{40} \cdot (R_4 - R_2) = \frac{U \cdot 10}{40} = 10 \text{ V}; \text{ Slijedi da je } U = 40 \text{ V}.$$

Napon je pozitivan što znači da označeni polaritet odgovara stvarnom.

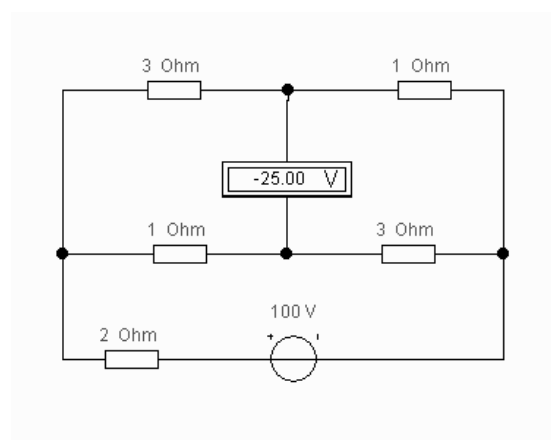
47.) Napon U_{ab} u spoju na slici iznosi $U_{ab} = -25 \text{ V}$. Treba izračunati potreban iznos napona izvora.



47.a) **Rješenje:** (EWB 5.1)

$$I = \frac{U}{4R}; \quad \varphi_a = \frac{U}{8R} \cdot R = \frac{U}{8}; \quad \varphi_b = \frac{U}{8R} \cdot 3R = \frac{3U}{8}$$

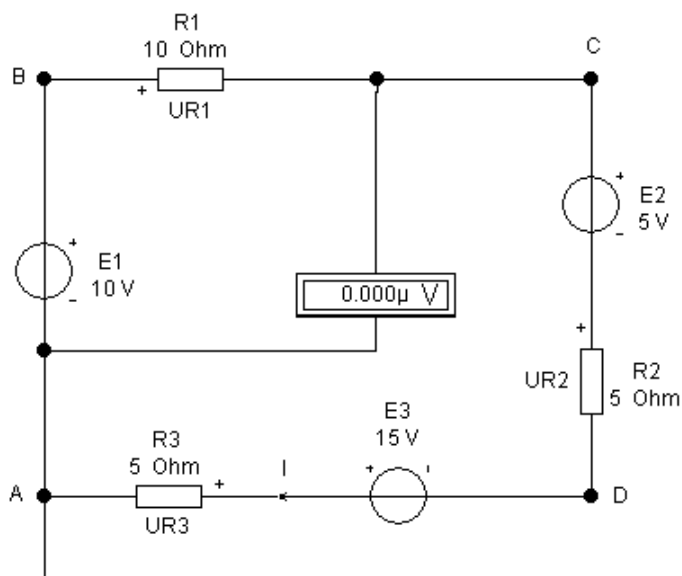
$$-25 = \frac{U}{8} - \frac{3U}{8}; \quad U = 100 \text{ V}$$



48.) Potrebno je izračunati potencijale pojedinih točaka, u odnosu na referentnu točku A u spoju prema slici.

48.a) Rješenje:

| TOČKA | B | C | D |
|--------------------------------|----|---|-----|
| potencijal točke (φ) | 10 | 0 | -10 |



Spojem teče struja $I = \frac{E_1 - E_2 + E_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10 - 5 + 15}{10 + 5 + 5} = \frac{20}{20} = 1 \text{ A}$ u naznačenom smjeru.

Treba primijetiti da pozitivni potencijal nastaje na ulazu struje u trošilo. Kako je iznos struje pozitivan, referentni smjer odgovara stvarnom.

Referentna točka A ima potencijal 0. Potencijali pojedinih točaka se izračunavaju kao:

$$\varphi_B = \varphi_A + E_1 = 10 \text{ V}; \quad \varphi_C = \varphi_B - I \cdot R_1 = 10 - 1 \cdot 10 = 0 \text{ V};$$

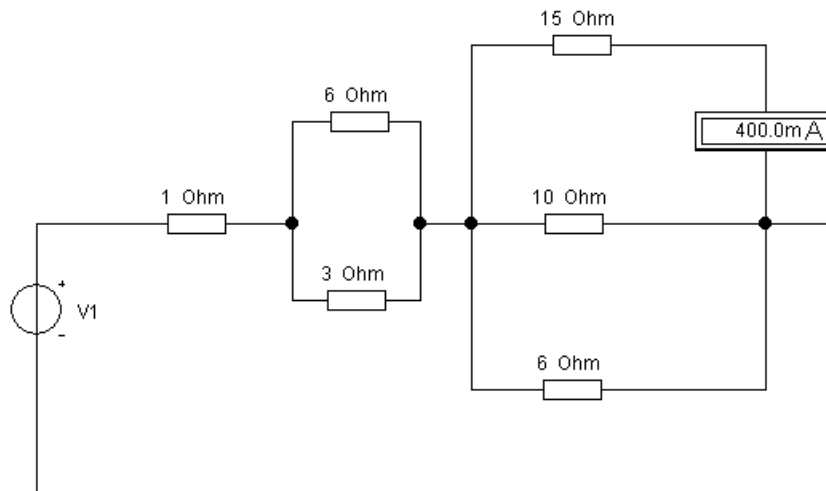
$$\varphi_D = \varphi_C - E_2 - I \cdot R_2 = 0 - 5 - 5 = -10 \text{ V}$$

Naravno da se svi potencijali mogu izračunati i desnim obilaskom po zadanoj petlji kao:

$$\varphi_D = \varphi_A + I \cdot R_3 - E_3 = 0 + 5 - 15 = -10 \text{ V}; \quad \varphi_C = \varphi_D + I \cdot R_2 + E_2 = -10 + 5 + 5 = 0 \text{ V};$$

$$\varphi_B = \varphi_C + I \cdot R_1 = 0 + 10 = 10 \text{ V}$$

49.) Potrebno je izračunati napon izvora u spoju prema slici:



49.a) Rješenje:

Napon izvora se računa kao produkt ukupne struje i ukupnog otpora:

$$\text{Ukupna struja iznosi: } I = 0,4 + \frac{15 \cdot 0,4}{10} + \frac{15 \cdot 0,4}{6} = 2 \text{ A}$$

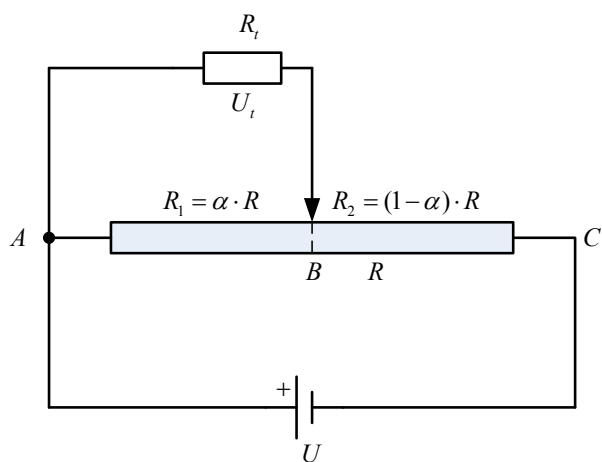
$$\text{Ukupni otpor iznosi: } R_u = 1 + \frac{6 \cdot 3}{6 + 3} + \left[\frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6} \right]^{-1} = 1 + 2 + 3 = 6 \text{ } \Omega$$

$$\text{Napon izvora iznosi: } U = I \cdot R_u = 2 \cdot 6 = 12 \text{ V}$$

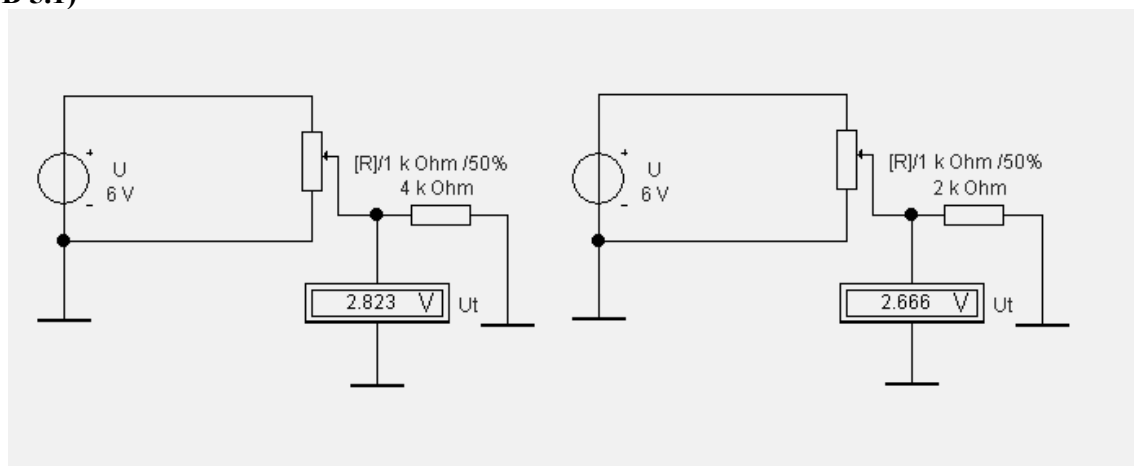
50.) Potrebno je grafički prikazati ovisnost napona na trošilu R_t za različite položaje klizača (ovisnost $U_t = f(\alpha)$), u potenciometarskom spoju prema slici i to kod različitih odnosa otpora R i R_t (različite vrijednosti parametra $p = R/R_t$).

50.a) Rješenje:

$$U_t = U \cdot \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{R}{R_t} \cdot (1 - \alpha)} \quad R_{AB} = \frac{R_t \cdot \alpha \cdot R}{R_t + \alpha \cdot R}; \quad U_t = U \cdot \frac{R_{AB}}{R_{AB} + R_2}$$



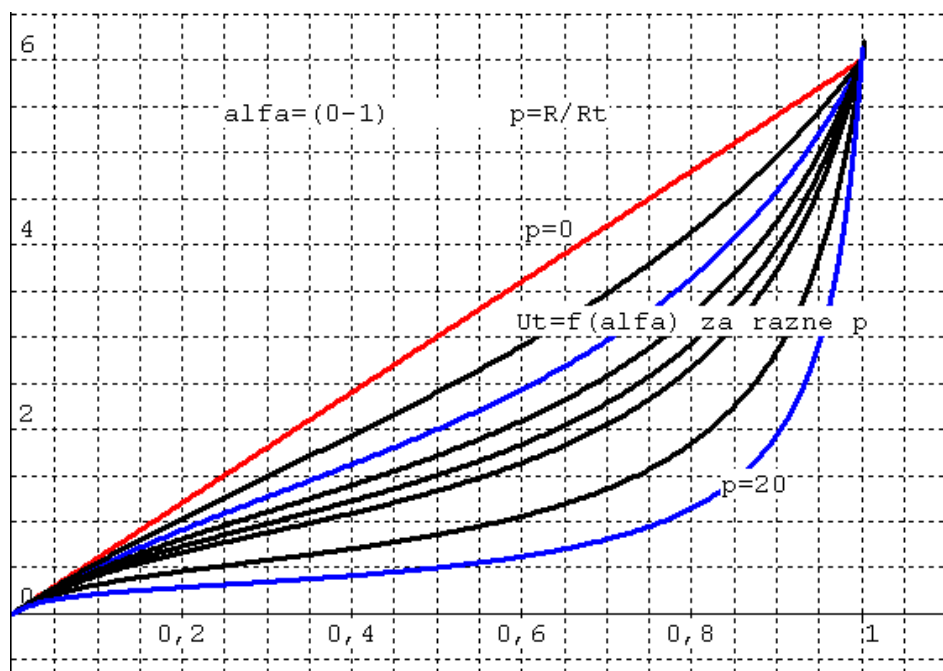
(EWB 5.1)



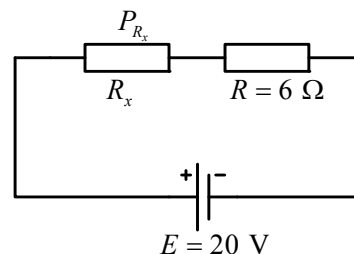
Na lijevoj slici $p = \frac{R}{R_t} = \frac{1}{4} = 0,25$; $\alpha = 0,5$ (50%) pa je

$$U_t = \frac{6}{2+0,25 \cdot 0,5} = \frac{6}{2,125} = 2,82353 \text{ V} . \text{ Na desnoj slici } p = \frac{1}{2}; \quad \alpha = 0,5 \text{ pa je}$$

$$U_t = \frac{6}{2+0,5 \cdot 0,5} = \frac{6}{2,25} = 2,6667 \text{ V} . \text{ Potenciometar na desnom spoju je jače opterećen.}$$



51.) Potrebno je izračunati otpore otpornika R_x u spoju prema slici, tako da njegova stvarna snaga bude 16 W.



51.a) Rješenje:

Da bi stvarna snaga otpornika R_x bila 16 W kroz njega mora teći struja: $I = \sqrt{\frac{P_{R_x}}{R_x}}$.

Struju je moguće izraziti i kao: $I = \frac{E}{R_x + R} = \frac{E}{R_x + 6}$, što znači da je:

$$\frac{E^2}{R_x^2 + 12R_x + 36} = \frac{16}{R_x}; \quad 400R_x = 16R_x^2 + 192R_x + 576$$

Jednadžba je kvadratna što upućuje na dva rješenja, a to je i normalno jer otpornik R_x sigurno posjeduje i maksimalnu snagu, pa prema tome mora postojati jedna manja, i jedna veća vrijednost otpornika R_x pri kojoj je snaga 16 W.

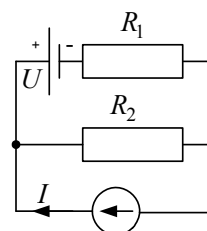
Iz jednadžbe $R_x^2 - 13R_x + 36$ slijedi da je: $R_{x1} = 4 \Omega$; $R_{x2} = 9 \Omega$

Otpornik R_x bi imao maksimalnu moguću snagu ako njegov otpor iznosi 6 Ω .

$$\text{Maksimalna snaga iznosi: } P_{\max} = \left(\frac{U_{R_x}}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{400}{24} = 16,66 \text{ W}$$

52.) Pri kojoj struji I naznačenog smjera snage na otpornicima su R_1 i R_2 u spoju na slici međusobno jednake. Koliko iznosi ta snaga?

Poznato je: $R_1 = 1 \Omega$; $R_2 = 2 \Omega$; $U = 9 \text{ V}$



52.a) Rješenje: Treba izraziti struje kroz otpornike (metoda superpozicije) i zapisati

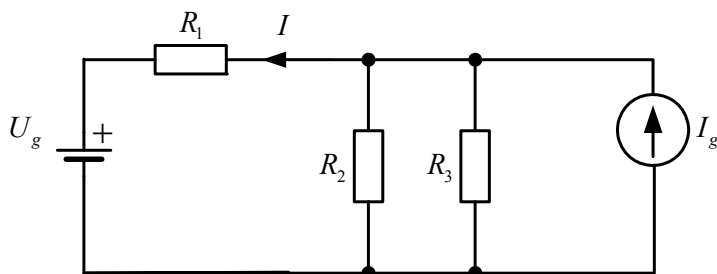
$$\text{snage kao } I^2 \cdot R. \quad I_{R1} = I \cdot \frac{2}{3} - \frac{U}{3} = \frac{2I}{3} - 3; \quad I_{R2} = \frac{I}{3} + 3$$

$$\text{Uvjet je: } P_{R1} = P_{R2}; \quad \left(\frac{2I}{3} - 3 \right)^2 = \left(\frac{I}{3} + 3 \right)^2 \cdot 2$$

Pozitivno rješenje je; $I = 37,1 \text{ A}$. Pri toj struji su snage jednake jer je

$$I_1 = 21,73 \text{ A}; \quad I_2 = 15,37 \text{ A}, \text{ pa je } 21,73^2 \cdot 1 = 15,37^2 \cdot 2 = 472 \text{ W}$$

53.) Potrebno je izračunati struju kroz otpornik R_1 , pomoću pretvorbe strujnog izvora u naponski. ($U_g = 15 \text{ V}$; $I_g = 2 \text{ A}$; $R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = 20 \Omega$; $R_3 = 40 \Omega$)



53.a) Rješenje:

Najprije treba izračunati ekvivalentni otpor $R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{800}{60} = \frac{40}{3} \Omega$

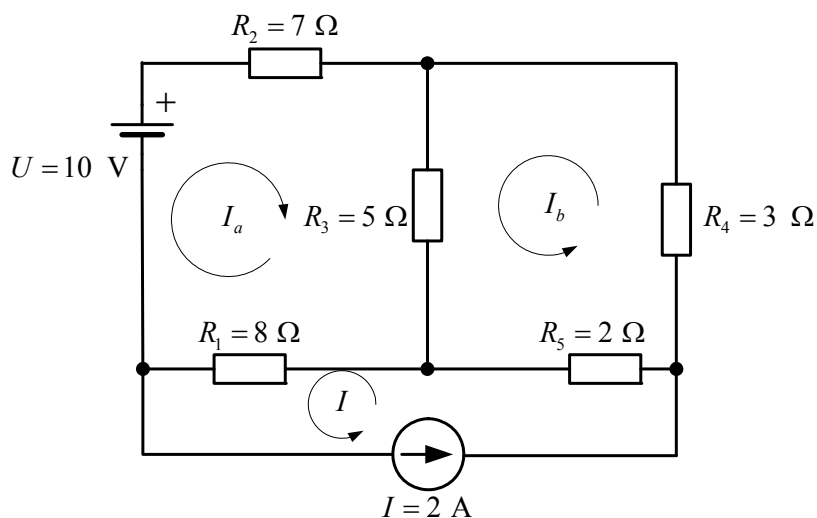
Strujni izvor zamijeniti naponskim sa $E = I_g \cdot R_{23} = 2 \cdot \frac{40}{3} = \frac{80}{3} \text{ V}$

Sada je struja kroz otpornik R_1 :

$$I = \frac{E_g - U_g}{R_1 + R_{23}} = \frac{\frac{80}{3} - 15}{10 + \frac{40}{3}} = \frac{\frac{35}{3}}{\frac{70}{3}} = \frac{35}{70} = 0,5 \text{ A}$$

(Smjer struje se podudara sa smjerom djelovanja strujnog izvora.)

54.) Kolika je snaga strujnog izvora u spoju prema slici. Zadatak riješiti metodom konturnih struja.



54.a) Rješenje:

Zapisuju se jednačbe petlji.

$$20I_a + 5I_b + 2 \cdot 8 = 10$$

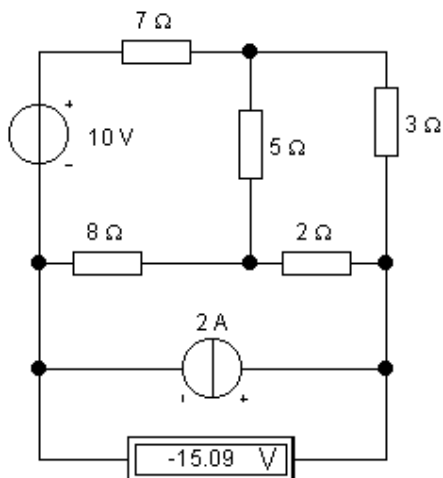
$$5I_a + 10I_b = 4$$

$$I_a = -0,457 \text{ A}; \quad I_b = 0,628 \text{ A}$$

$$I_{R_1} = -0,457 + 2 = 1,543 \text{ A}; \quad I_{R_5} = 2 - 0,628 = 1,372 \text{ A}$$

Na priključnicama strujnog izvora vlada napon: $U = 1,543 \cdot 8 + 1,372 \cdot 2 = 15,088 \text{ V}$

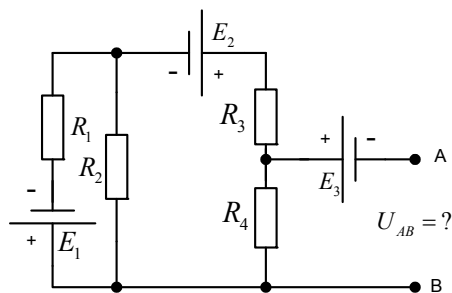
Snaga strujnog izvora je: $P = U \cdot I = 15,088 \cdot 2 = 31,166 \text{ W}$



55.) Potrebno je izračunati napon U_{AB} u spoju na slici ako je zadano:

$$E_1 = 10 \text{ V}; E_2 = E_3 = 2 \text{ V}; R_1 = R_2 = 20 \Omega;$$

$$R_3 = 10 \Omega; R_4 = 40 \Omega$$



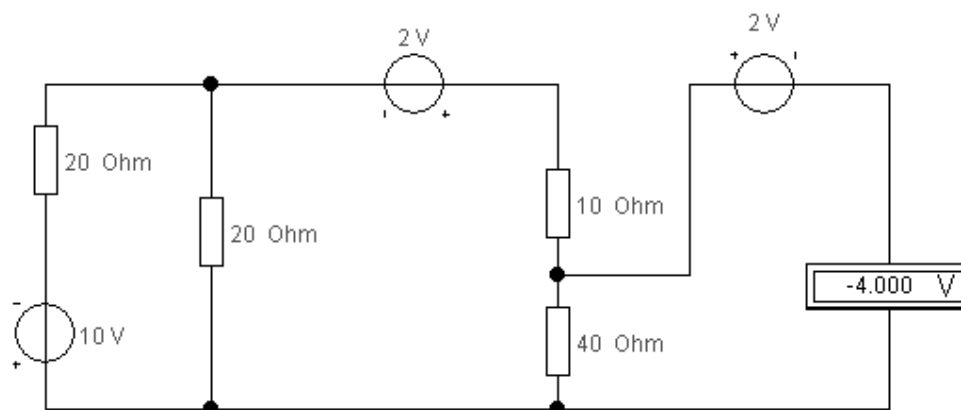
55.a) **Rješenje:** Zadatak se rješava metodom konturnih struja. Jednadžbe petlji su:

$$E_1 = I_1 \cdot (R_1 + R_2) - I_2 \cdot R_2$$

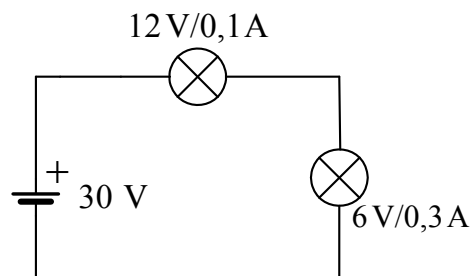
$$-E_2 = -I_1 \cdot R_2 + I_2 \cdot (R_2 + R_3 + R_4)$$

Rješenjem jednadžbi slijedi da je $I_2 = \frac{1}{20} \text{ A}$. Napon na R_4 je: $I_2 \cdot R_4 = \frac{1}{20} \cdot 40 = 2 \text{ V}$

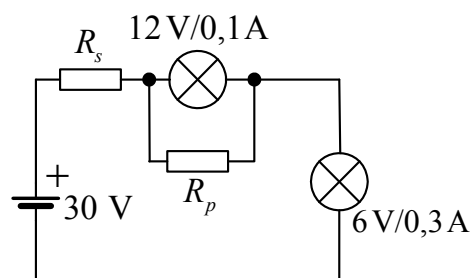
Potencijal točke B se zapisuje kao: $\varphi_A = \varphi_B - 2 - 2$; $\varphi_A - \varphi_B = U_{AB} = -4 \text{ V}$



56.) Treba spojiti u krug otpornike čija je nazivna snaga 4 W, tako da obje žaruljice normalno svijetle.



56.a) Rješenje: Otpornike je moguće spojiti prema slici:



Vrijednosti serijskog otpornika:

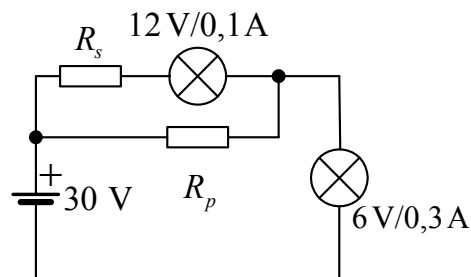
$$R_s = \frac{30 - 12 - 6}{0,3} = 40 \, \Omega; \quad P_{R_s} = I^2 \cdot R_s = 0,09 \cdot 40 = 3,6 \, \text{W}$$

Vrijednosti paralelnog otpornika:

$$R_p = \frac{12}{0,2} = 60 \, \Omega; \quad P_{R_p} = 12 \cdot 0,2 = 2,4 \, \text{W}$$

Stvarna snaga otpornika je manja od nazivne.

Drugi mogući način spajanja je:



Na otporniku R_p je sada napon $30 - 6 = 24 \, \text{V}$. Iznos otpora je: $R_p = \frac{24}{0,2} = 120 \, \Omega$

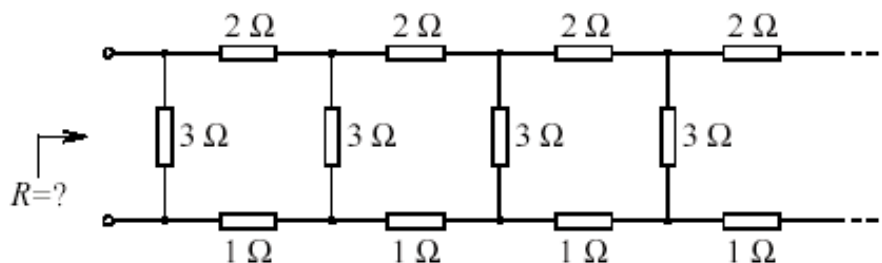
Njegova stvarna snaga iznosi: $P_{R_p} = 24 \cdot 0,2 = 4,8 \, \text{W}$; $(4,8 \, \text{W} > 4 \, \text{W})$

Serijski otpornik ima vrijednosti:

$$R_s = \frac{24 - 12}{0,1} = 120 \, \Omega; \quad P_{R_s} = 0,1^2 \cdot 120 = 1,2 \, \text{W}$$

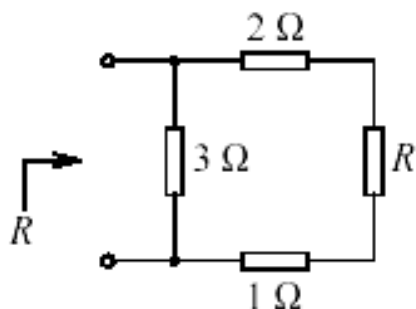
To znači da je mjerodavan prvi spoj.

57.) Potrebno je izračunati otpor beskonačnog otpornog lanca prema slici:



57.a) Rješenje:

Budući da je otporni lanac beskonačan, ukupni otpor iza prve „karike“ je isti i iznosi R (Ω)



$$\text{Zato vrijedi da je: } R = \frac{3 \cdot (3 + R)}{3 + 3 + R} = \frac{9 + 3R}{6 + R}$$

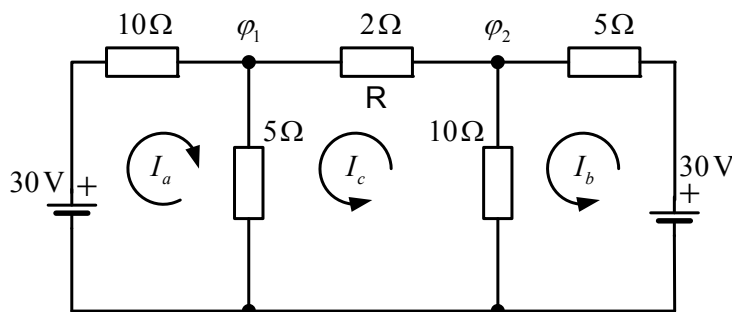
Sređivanjem jednačbe slijedi:

$$R^2 + 3R - 9 = 0; \quad R_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{6,708}{2}$$

Pozitivna vrijednost iznosi: $R = 1,854 \Omega$

58.) Treba izračunati jakost struje kroz otpornik od 2Ω u spoju prema slici:

- metodom napona čvorova
- metodom konturnih struja
- Theveninovim teoremom
- simulacijom u EWB-u



58.a) Rješenje: Metodom čvorova

Kroz otpornik $2\ \Omega$ teče struja I_c koja se može izračunati ako su poznati potencijali

čvorova φ_1 i φ_2 , jer je $I = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R}$

$$\begin{aligned} \text{Jednadžbe čvorova su: } \quad & \varphi_1 \cdot (0,1 + 0,5 + 0,2) - \varphi_2 \cdot 0,5 = 30 \cdot 0,1 \\ & -0,5 \cdot \varphi_1 + \varphi_2 \cdot (0,2 + 0,5 + 0,1) = 30 \cdot 0,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sređivanjem se dobiva: } \quad & 0,8 \cdot \varphi_1 - 0,5 \cdot \varphi_2 = 3 \\ & -0,5 \cdot \varphi_1 + 0,8 \cdot \varphi_2 = 6 \end{aligned}$$

$$\text{Jednadžbe daju rješenja: } \varphi_1 = 13,846\ \text{V}; \quad \varphi_2 = 16,154\ \text{V}$$

$$\text{Jakost struje kroz otpornik R iznosi: } I = \frac{16,154 - 13,846}{2} = 1,154\ \text{A}$$

58.b) Rješenje: Metodom konturnih struja

$$15I_a + 5I_c = 30$$

$$\text{Zapisuju se jednadžbe struja petlji: } 15I_b - 10I_c = 30$$

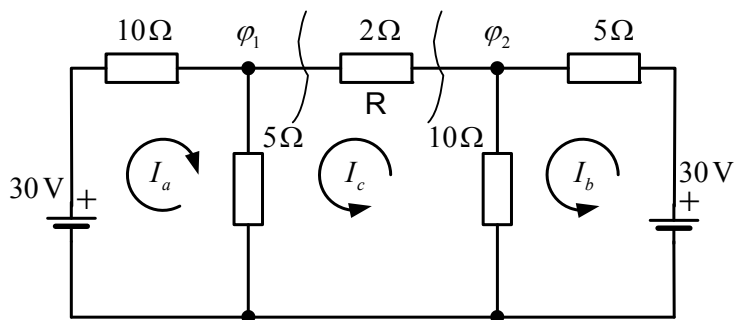
$$17I_c + 5I_a - 10I_b = 0$$

$$\text{Iz prve jednadžbe slijedi da je: } I_a = \frac{6 - I_c}{3}$$

$$\text{Iz druge jednadžbe slijedi da je: } I_b = \frac{3 + I_c}{1,5}$$

$$\text{Uvrštavanjem u treću jednadžbu slijedi: } 17 \cdot I_c + 5 \cdot \frac{6 - I_c}{3} - 10 \cdot \frac{3 + I_c}{1,5} = 0$$

$$\text{Sređivanjem jednadžbe slijedi: } 26 \cdot I_c = 30; \quad I_c = \frac{30}{26} = 1,1538\ \text{A}$$

58.c) Rješenje: Theveninovim teoremom

Otpornik R treba odvojiti od preostalog dijela mreže (prema slici) te u točkama u kojima je prethodno bio spojen taj otpornik, izračunati Theveninov napon i otpor.

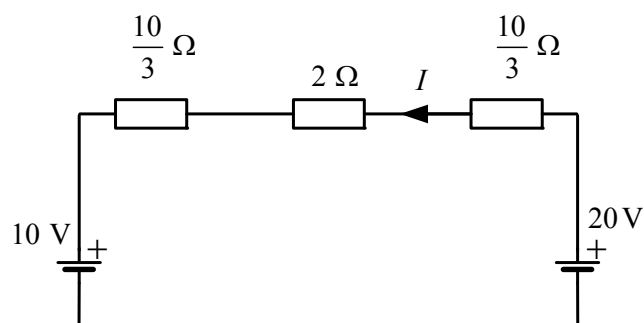
Theveninov napon je ustvari razlika potencijala φ_1 i φ_2 s obzirom na zajedničku

referentnu točku. $\varphi_1 = 30 \cdot \frac{5}{10+5} = 10 \text{ V}$; $\varphi_2 = 30 \cdot \frac{10}{10+5} = 20 \text{ V}$

Theveninov otpor lijevog dijela mreže iznosi: $R_{T1} = \frac{10 \cdot 5}{10+5} = \frac{10}{3} \Omega$;

Theveninov otpor desnog dijela mreže iznosi: $R_{T2} = \frac{10 \cdot 5}{10+5} = \frac{10}{3} \Omega$;

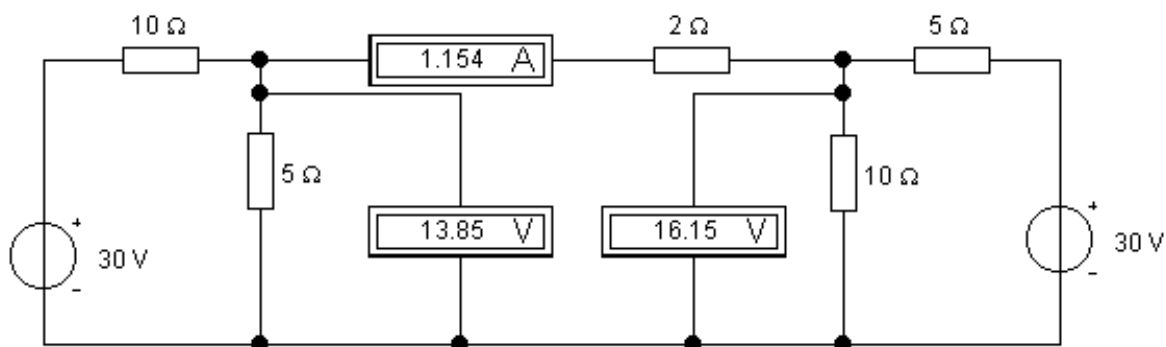
Novi spoj izgleda:



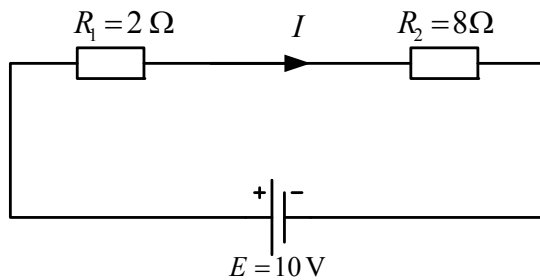
Jakost struje je sada jednostavno izračunati :

$$I = \frac{20-10}{\frac{10}{3} + 2 + \frac{10}{3}} = \frac{10}{\frac{26}{3}} = \frac{30}{26} = 1,1538 \text{ A}$$

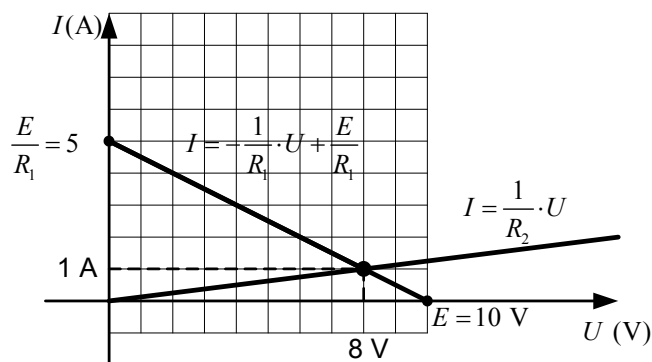
58.d) Rješenje: Simulacija u EWB-u



59.) Potrebno je riješiti grafičkim putem spoj prema slici:

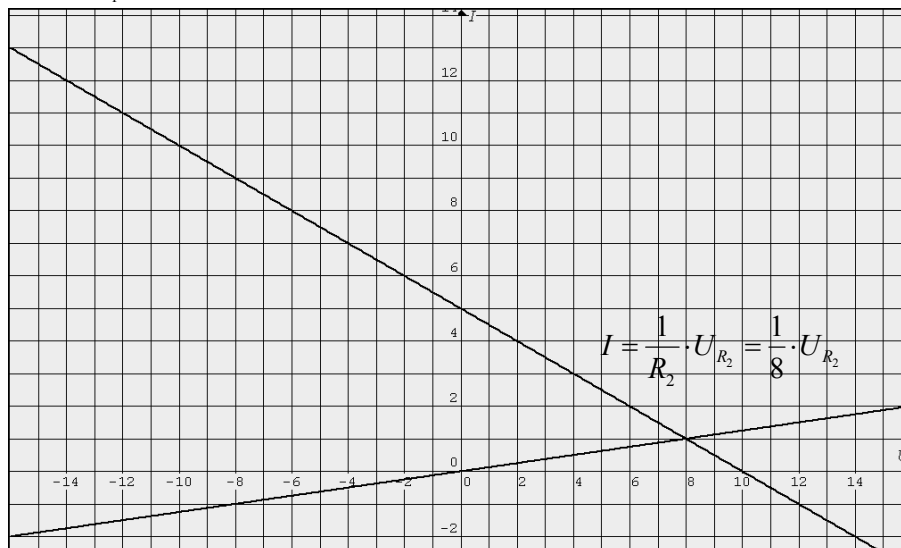


59.a) Rješenje:



Jednadžbu $U_{R_2} = E - I \cdot R_1$ je moguće zapisati u segmentnom obliku pa je;

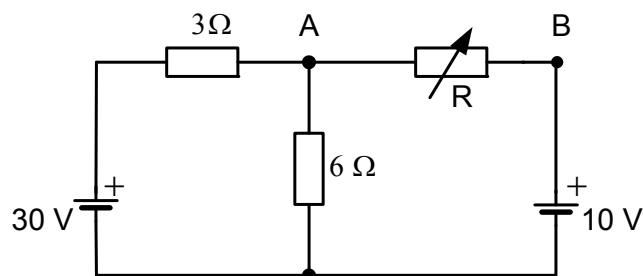
$$\frac{U_{R_2}}{E} + \frac{I}{\frac{E}{R_1}} = 1; \quad \frac{U_{R_2}}{10} + \frac{I}{5} = 1$$



Sjecište pravaca daje rješenja za napon na otpornicima i struju serijskog spoja..

$$(U_{R_2} = 8\text{ V}; \quad U_{R_1} = 2\text{ V}; \quad I = 1\text{ A})$$

60.) Kolika je najveća moguća snaga koja se može pojaviti na promjenljivom otporniku R u spoju prema slici?



60.a) Rješenje: Najveća snaga na otporniku R će se pojaviti ako je njegov otpor jednak Theveninovom otporu s obzirom na stezaljke AB. Taj otpor iznosi:

$$R_{AB} = R_T = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \, \Omega$$

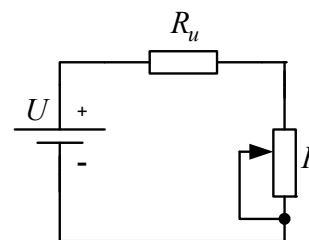
(Pritom je otpornik R odspojen, a naponski izvori kratko spojeni).

Theveninov napon u točkama AB je jednak razlici potencijala u tim točkama, s obzirom na zajedničku referentnu točku. $U_T = U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$.

$$\varphi_A = 30 \cdot \frac{6}{6 + 3} = 20 \, \text{V}; \quad \varphi_B = 10 \, \text{V}; \quad U_T = 20 - 10 = 10 \, \text{V}$$

Maksimalnu snagu treba odrediti prema izrazu: $P_{\max} = \frac{U_T^2}{4 \cdot R_T} = \frac{100}{4 \cdot 2} = 12,5 \, \text{W}$

61.) U spoju na slici promjenljivi otpornik R ima maksimalnu električnu snagu. Za koliko posto od maksimalne snage se smanji snaga otpornika R ako se njegov otpor poveća dva puta?



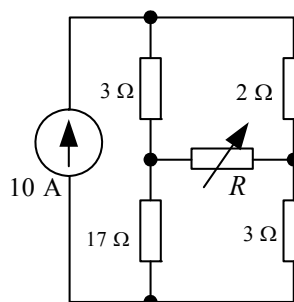
61.a) Rješenje: Maksimalna snaga na R se pojavi ako je $R = R_u$ i iznosi:

$$P_{\max} = \left(\frac{U}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{R_u} = \frac{U^2}{4R_u}. \text{ Ako je } R = 2R_u \text{ napon na R iznosi: (naponski djelitelj)}$$

$$U_{2R} = U \cdot \frac{2R}{3R} = \frac{U \cdot 2}{3}, \text{ snaga } P_{2R} = \left(\frac{2U}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{2R_u} = \frac{4 \cdot U^2}{18 \cdot R_u} = \frac{U^2}{4,5 \cdot R_u}:$$

$$\Delta P\% = \frac{P_{2R} - P_{\max}}{P_{\max}} \cdot 100 = \frac{-\frac{U^2}{36 \cdot R_u}}{\frac{U^2}{4 \cdot R_u}} = -\frac{1}{9} \cdot 100 = -11,11\%$$

62.) Treba odrediti najveću moguću snagu na promjenljivom otporniku u mosnom spoju prema slici

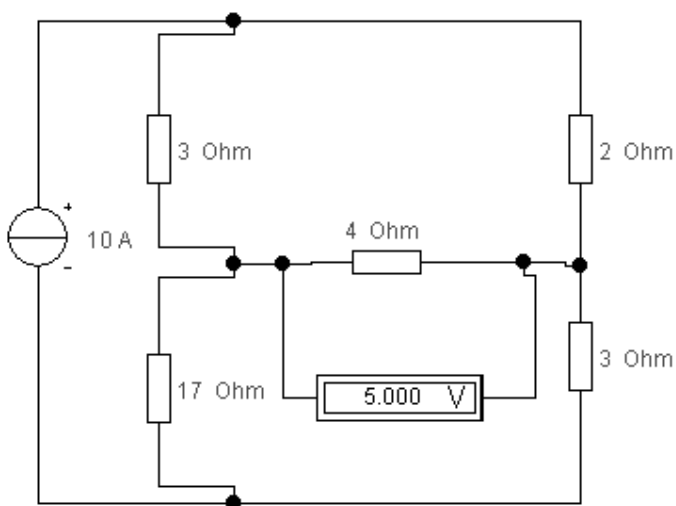


62.a) Rješenje: Na promjenljivom otporniku će se pojaviti maksimalna snaga ako je njegov otpor jednak Theveninovom otporu u točkama gdje je on spojen .

Theveninov otpor iznosi: $R_T = \frac{(3+2) \cdot (17+3)}{25} = 4 \Omega$. Theveninov napon iznosi:

$$U_T = \frac{17 \cdot 10 \cdot 5}{25} - \frac{30 \cdot 20}{25} = 34 - 24 = 10 \text{ V}$$

Maksimalna snaga iznosi: $P_{\max} = \frac{U_T^2}{4R_T} = \frac{100}{4 \cdot 4} = 6,25 \text{ W}$



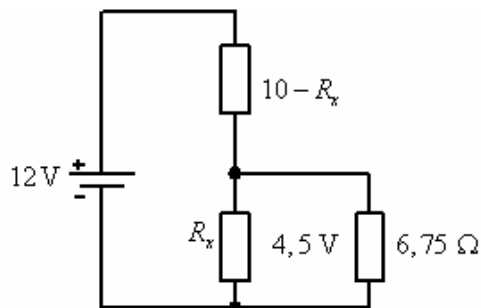
$$P_{\max} = \frac{U_v^2}{4} = 6,25 \text{ W}$$

63.) Treba odrediti položaj klizača 10- omskog potencijometra, tako da žaruljica bude pravilno napajana.

63.a) Rješenje:

Žaruljica će biti pravilno napajana ako na njoj vlada napon 4,5 V. Zato vrijedi:

$$I = \frac{4,5}{R_y} = \frac{7,5}{10 - R_x};$$



$$45 - 4,5R_x = 7,5R_y; \quad 45 - 4,5R_x = \frac{50,625R_x}{R_x + 6,75}, \text{ jer je } R_y = \frac{R_x \cdot 6,75}{R_x + 6,75}$$

$$\text{Sređivanjem proizlazi: } R_x^2 + 8R_x - 67,5 = 0, \text{ pa je: } R_{x1,2} = -4 \pm \sqrt{16 + 67,5}$$

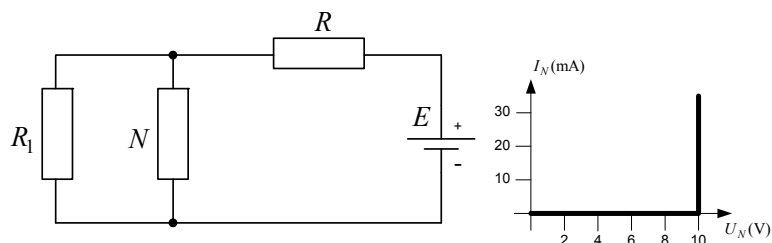
$$\text{Mjerodavan je, naravno, pozitivan rezultat pa je: } R_x = -4 + 9,138 = 5,138 \, \Omega$$

NELINEARNI ELEMENTI U KRUGOVIMA ISTOSMJERNE STRUJE

64.) Treba odrediti iznos otpora R u spoju na slici tako da kroz nelinearni element teče struja

$I_N = 10 \text{ mA}$, ako je

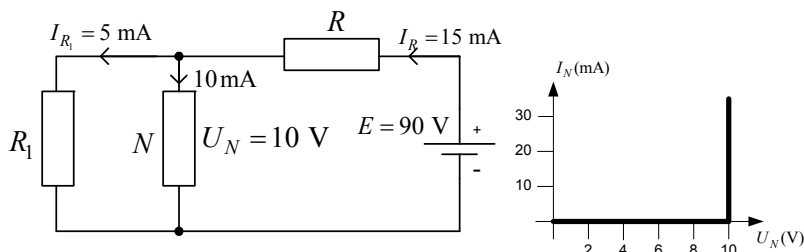
zadano: $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ i $E = 90 \text{ V}$



64.a) Rješenje:

$$I_{R_1} = \frac{U_N}{R_1} = \frac{10}{2 \cdot 10^3} = 5 \text{ mA}; \quad I_R = 5 + 10 = 15 \text{ mA}$$

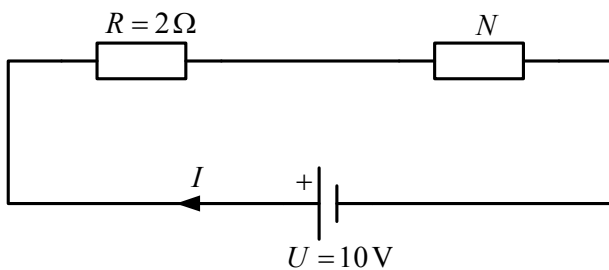
$$R = \frac{U_R}{I_R} = \frac{80}{15 \cdot 10^{-3}} = 5,33 \text{ k}\Omega$$



65.) Linearni i nelinearni element su spojeni serijski i priključeni na izvor istosmjernog napona $U = 10 \text{ V}$. Poznata je voltamperska karakteristika nelinearnog elementa

$I = k \cdot U^2$; $k = 0,5 \frac{\text{A}}{\text{V}^2}$ i $U > 0$. Kolika struja teče spojem, ako je iznos otpora linearnog elementa $R = 2 \Omega$? Zadatak riješiti analitički i grafički.

65.a) Rješenje - analitičko:



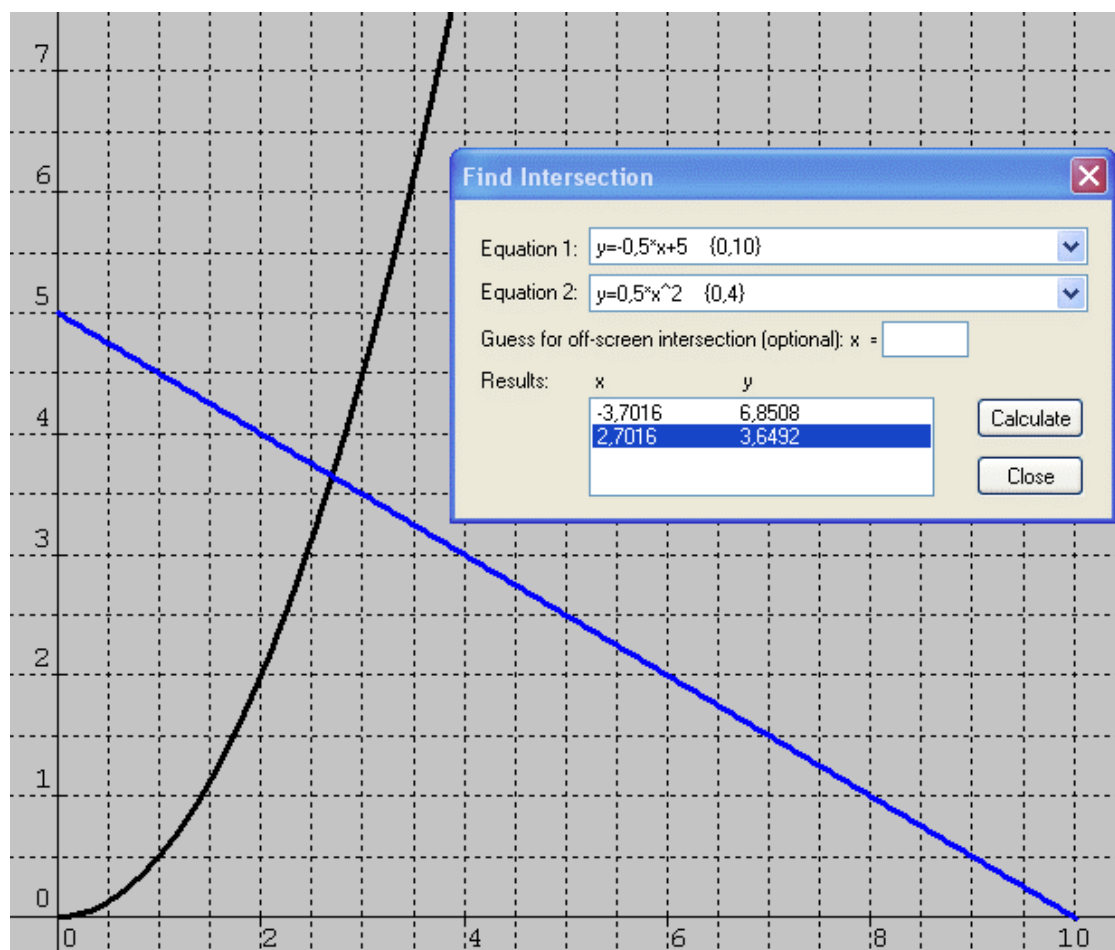
Struja kroz spoj se zapisuje kao:

$$I = \frac{10 - U_N}{2} = 0,5 \cdot U_N^2$$

Rješenje kvadratne jednačbe daje:

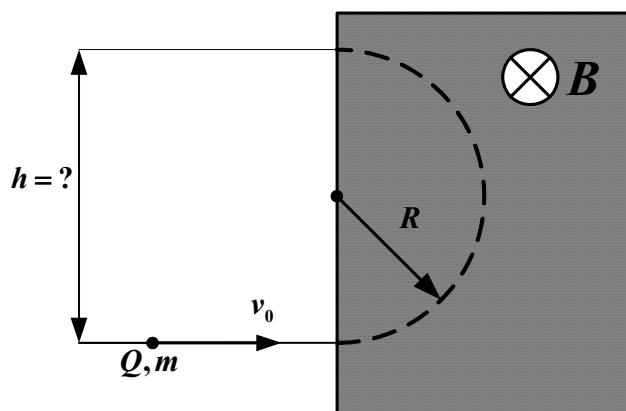
$$I = 3,65 \text{ A}; \quad U_N = 2,7 \text{ V}; \quad U_R = 7,3 \text{ V}$$

65.b) Rješenje - grafičko: (GRAPHMATICA 2.1)

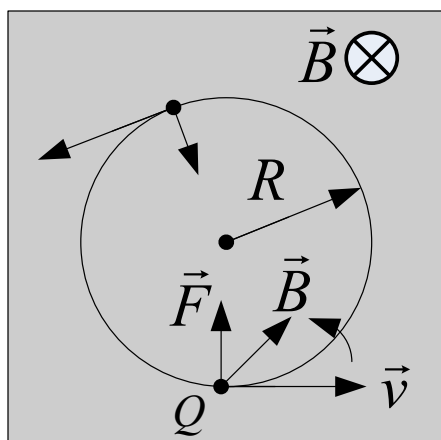


NABIJENA ČESTICA U MAGNETSKOM POLJU

66.) Proton na slici brzinom $v_0 = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ uđe u područje homogenog magnetskog polja indukcije $B = 2 \text{ T}$. Treba odrediti visinu h prema slici na kojoj proton izađe iz polja.



66.a) Rješenje: Ako se pozitivni naboj Q giba brzinom v okomito na smjer homogenog magnetskog polja indukcije \vec{B} , putanja naboja biti će kružnica.



Prema izrazu za magnetsku silu na naboj u gibanju $\vec{F}_M = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ (N) na pozitivni će naboj, okomito na smjer magnetske indukcije i okomito na smjer gibanja, djelovati magnetska sila. Ta sila ne mijenja iznos u pojedinim točkama na kružnici, nego samo smjer gibanja i pritom je brzina stalnog iznosa. To znači da je i magnetska sila stalnog iznosa u svim točkama na kružnici i djeluje prema središtu.

Smjer sile na pozitivni naboj je određen **pravilom desnog vijka**. Naime, ako se ravnina koju tvore vektori \vec{v} i \vec{B} zarotira u smjeru naznačenom na slici (od \vec{v} prema \vec{B}), smjer sile je prema gore. (Desni vijak bi se gibao prema gore, pri okretanju u naznačenom smjeru.) Poznato je da se pri gibanju po kružnici javlja centrifugalna sila koja djeluje od središta. Magnetska sila na naboj i centrifugalna sila u svakoj su točki na kružnici u ravnoteži pa vrijedi jednakost:

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = Q \cdot v \cdot B.$$

Iz te jednakosti može se odrediti polumjer kružnice po kojoj se giba nabijena čestica.

Slijedi da je:
$$R = \frac{m \cdot v}{Q \cdot B} \text{ (m)}$$

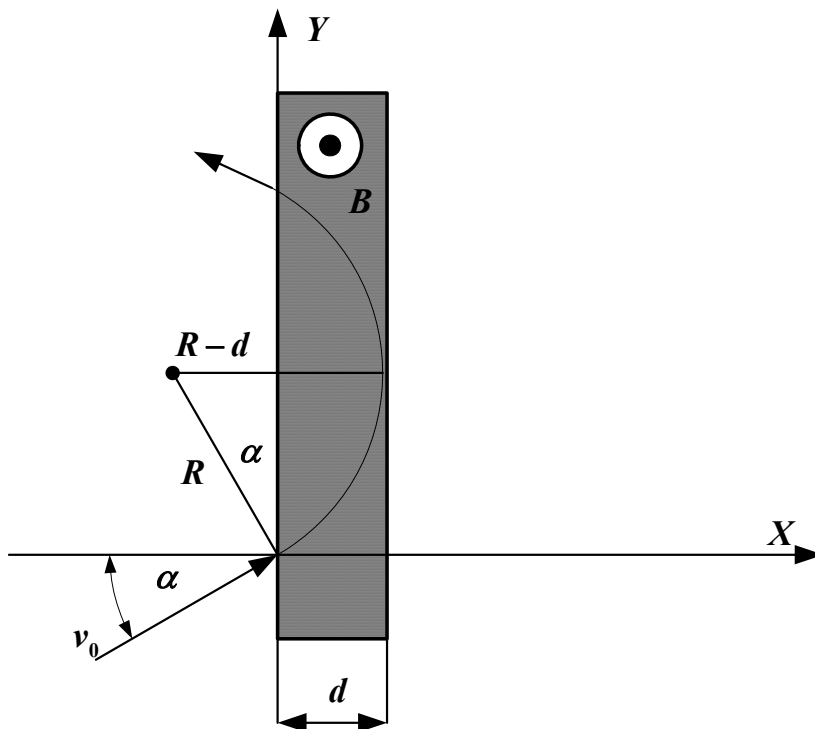
U području homogenog magnetskog polja proton se giba po kružnici polumjera:

$$R = \frac{m \cdot v_0}{Q \cdot B} = \frac{1,6 \cdot 10^{-27} \cdot 2 \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2} = 10^{-3} \text{ m} = 1 \text{ mm}.$$

Zato je visina na kojoj proton izađe iz magnetskog polja

$$h = 2R = 2 \text{ mm}.$$

67.) Za slučaj kad u pojas homogenog magnetskog polja B širine $d = 5 \text{ cm}$ na slici uđe elektron brzinom $v = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ pod kutom $\alpha = 30^\circ$, treba odrediti iznos magnetske indukcije B .



67.a) Rješenje:

Treba primijetiti da se ovdje radi o negativno nabijenoj čestici, a smjer magnetske indukcije je suprotan onom u prethodnom slučaju. Iz slike je vidljivo da je:

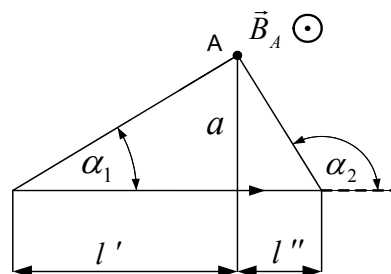
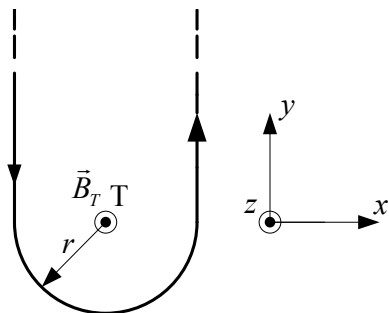
$$R - d = R \cdot \sin 30^\circ = 0,5 \cdot R$$

$$d = 0,5 \cdot R; \quad R = 2d = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$

$$B = \frac{m \cdot v}{e \cdot R} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 10^6}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,1} = 113,875 \mu\text{T}$$

IZRAČUNAVANJE JAKOSTI MAGNETSKOG POLJA I MAGNETSKE INDUKCIJE

68.) Treba odrediti vektor magnetske indukcije \vec{B} u točki T koja je središte polukružnog zavoja vodiča po kojem teče struja $I=10$ A. Polumjer polukružnog zavoja vodiča je $r = 1$ cm.



Sl. 4.12

68.a) Rješenje:

Ukupna magnetska indukcija u točki T se dobije superpozicijom magnetskih indukcija dvaju ravnih vodiča i polukružnog zavoja. Jedan vodič „dolazi“ iz beskonačnosti, a drugi se proteže u beskonačnost.

Magnetska indukcija vodiča konačne dužine određuje se prema izrazu:

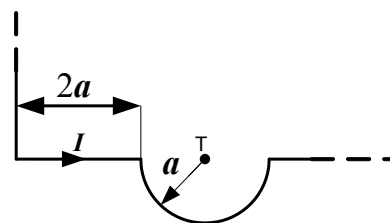
$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4r\pi} \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \text{ Mjerodavni kutovi su označeni na slici 4.12}$$

$$\vec{B}_T = \vec{k} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{4r} + \vec{k} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{4r\pi} \cdot (\cos 90^\circ - \cos 180^\circ) + \vec{k} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{4r\pi} \cdot (\cos 0^\circ - \cos 90^\circ)$$

$$\vec{B}_T = \vec{k} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{4r} \cdot \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \cong \vec{k} \cdot 5,14 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

69.) Magnetska indukcija u točki T na slici iznosi

$\vec{B} = \vec{k} \cdot 173,66 \text{ } \mu\text{T}$. Kolika je jakost struje koja je rezultirala tu indukciju, ako je $a = 20$ cm?



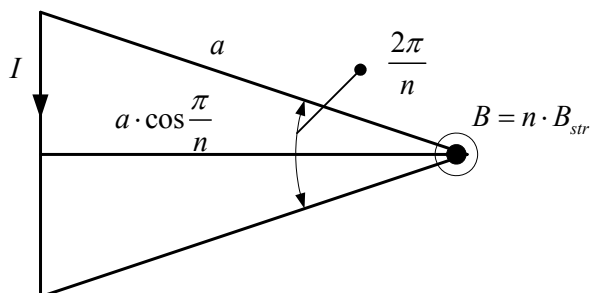
69.a) Rješenje:

Magnetsku indukciju u točki T ostvaruje struja koja teče kroz dio vodiča na čijoj osi ne leži točka T ni struja polukružnog zavoja.

$$\vec{B}_T = \vec{k} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot 3a} \cdot (\cos 0^\circ - \cos \frac{\pi}{2}) + \vec{k} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2a} = \vec{k} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{4a} \cdot \left(\frac{1}{3\pi} + 1\right)$$

$$B = B = 17,373 \cdot 10^{-7} \cdot I; \quad I = \frac{B}{17,373 \cdot 10^{-7}} = \frac{173,37 \cdot 10^{-6}}{17,373 \cdot 10^{-7}} = 100 \text{ A}$$

70.) Potrebno je izvesti izraz za magnetsku indukciju u središtu n-terokuta, pomoću izraza za magnetsku indukciju vodiča konačne duljine. Pokažite da za $n \rightarrow \infty$ taj izraz prelazi u izraz za magnetsku indukciju kružnog zavoja.



70.a) Rješenje:

Izraz za magnetsku indukciju vodiča konačne dužine može se zapisati i kao:

$$B_{str} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot \cos \frac{\pi}{n}} \cdot \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{\pi}{n} \right) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \sin \frac{\pi}{n}}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \cos \frac{\pi}{n}} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{2 \cdot \pi \cdot a}$$

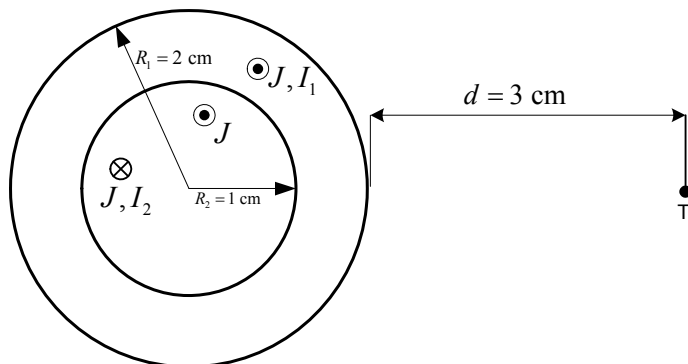
Ukupna indukcija u središtu n-terokuta je: $B = n \cdot B_{str} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{2 \cdot a \cdot \pi}$

Ako se pomnoži izraz u brojniku i nazivniku s $\frac{\pi}{n}$, izraz prelazi u :

$$B = n \cdot B_{str} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{n}}{2 \cdot a \cdot \pi \cdot \frac{\pi}{n}} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot a} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$$

$$\lim B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot a} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot a}$$

71.) Kroz bakrenu cijev (prema slici) teče struja konstantne gustoće. Mjerenjem pomoću Hallove sonde je na udaljenosti d od površine vodiča izmjerena magnetska indukcija $B=1,2$ mT. Treba izračunati gustoću struje u cijevi.



71.a) Rješenje:

Magnetska indukcija punog ravnog vrlo dugog (beskonačno dugog) vodiča na

udaljenosti r od središta vodiča, određuje se prema poznatom izrazu: $B = \frac{I \cdot \mu_0}{2r\pi}$.

Šuplji vodič (cijev) se može tretirati kao puni vodič, kod kojeg kroz šuplji dio teku dvije struje istog iznosa suprotnog smjera. (Vidi sliku). Struja I_1 je struja kroz „puni“ vodič.

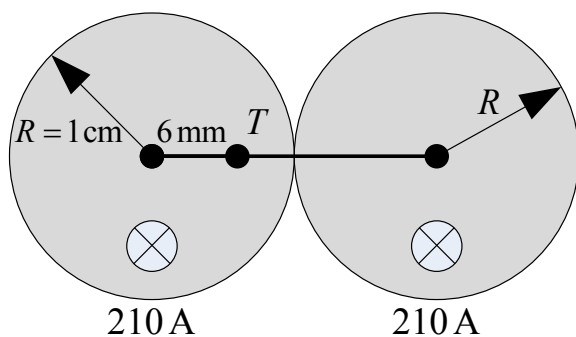
$$B = B_1 - B_2 = \frac{I_1 \cdot \mu_0}{2r\pi} - \frac{I_2 \cdot \mu_0}{2r\pi} = \frac{J \cdot \mu_0}{2r\pi} \cdot (R_1^2 \cdot \pi - R_2^2 \cdot \pi) = \frac{J \cdot \mu_0}{2r} \cdot (R_1^2 - R_2^2)$$

U izrazu je $r = R_1 + d$ (udaljenost točke T od središta vodiča.)

Gustoća struje u vodiču iznosi:

$$J = \frac{B \cdot 2r}{\mu_0 \cdot (R_1^2 - R_2^2)} = \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 0,3183 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} = 0,3183 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$$

72.) Dva vodiča promjera 2 cm koji se dodiruju, vode struju 420 A. Potrebno je izračunati apsolutni iznos magnetske indukcije u točki T (na slici) koja leži na spojnici između osi vodiča i od osi jednog vodiča je pomaknuta za 6 mm.



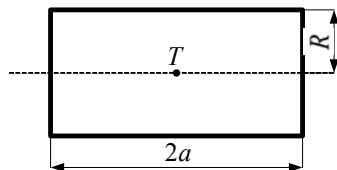
72.a) Rješenje:

Zbog istih smjerova struja, magnetske indukcije se u točki T oduzimaju jer su istog smjera i suprotnih orijentacija.

Rezultantna magnetska indukcija u točki T je:

$$B_{\text{rez.}} = B_{\text{desnog}} - B_{\text{lijevog}} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 10^{-2} - 6 \cdot 10^{-3}} - \frac{6 \cdot 10^{-3}}{(1 \cdot 10^{-2})^2} \right) = 420 \cdot 10^{-7} \cdot \left(\frac{1000}{14} - 60 \right) = 480 \text{ } \mu\text{T}$$

73.) Treba odrediti jakost magnetskog polja u središtu ravne zavojnice s podacima:
 $R = 1\text{ cm}$; $2 \cdot a = 4\text{ cm}$; $N = 20$ zavoja; $I = 10\text{ A}$, **po točnom i pojednostavljenom izrazu.**
Potrebno je izračunati i nastalu grešku u postotcima od točne vrijednosti.



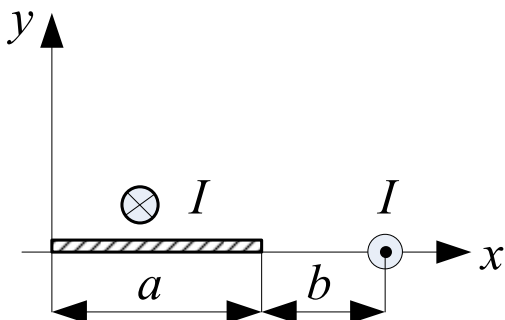
73.a) Rješenje:

Približna vrijednost iznosi: $H' = \frac{I \cdot N}{l} = \frac{10 \cdot 20}{4 \cdot 10^{-2}} = 5000 \frac{\text{A}}{\text{m}}$

Točna vrijednost: $H'' = \frac{I \cdot N}{2l} \cdot 2 \cdot \cos \alpha = 2500 \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{1+2^2}} = 2500 \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = 4472,14 \frac{\text{A}}{\text{m}}$

Postotna greška iznosi: $\Delta H\% = \frac{H' - H''}{H''} \cdot 100 = 11,8\%$

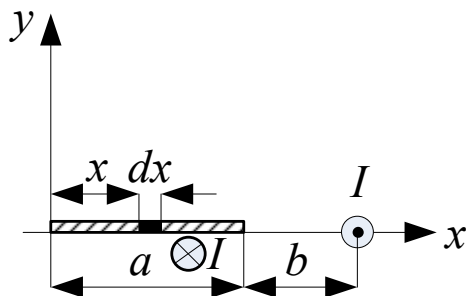
74.) Trakasti i tanki okrugli vodič čine dvožični vod. Treba odrediti vektor magnetske sile na desni vodič na dužini 10 m, ako je $I = 5 \text{ A}$; $a = 3 \text{ cm}$; $b = 2 \text{ cm}$



74.a) Rješenje:

Trakasti vodič se može podijeliti na diferencijalno uske trake širine dx . Magnetska sila na desni vodič na dužini $l = 10 \text{ m}$ je odbojna. Struja u diferencijalnom elementu

trakastog vodiča izražava se kao: $dI = \frac{I}{a} \cdot dx$



Diferencijal sile izražava se kao:

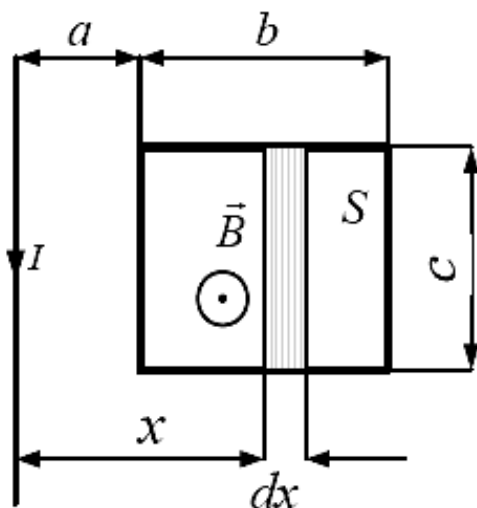
$$dF = dB \cdot l \cdot I = \frac{dI \cdot \mu_0}{2\pi \cdot (a + b - x)} \cdot l \cdot I = \frac{I \cdot \mu_0 \cdot dx}{2\pi \cdot a \cdot (a + b - x)} \cdot l \cdot I = \frac{I^2 \cdot \mu_0 \cdot dx}{2\pi \cdot a \cdot (a + b - x)} \cdot l$$

Ukupna sila je: $F = \int_0^a dF = \frac{I^2 \cdot \mu_0 \cdot l}{2\pi \cdot a} \cdot \ln \frac{a+b}{b} = 1,53 \text{ mN}$

Uputa: Zamijeniti $(a + b - x)$ sa (u)

IZRAČUNAVANJE MAGNETSKOG TOKA

75.) Potrebno je izračunati iznos magnetskog toka kroz petlju na slici ako je $a = b = c = 5 \text{ cm}$ i vodičem teče struja $I = 100 \text{ A}$ naznačenog smjera.



75.a) Rješenje:

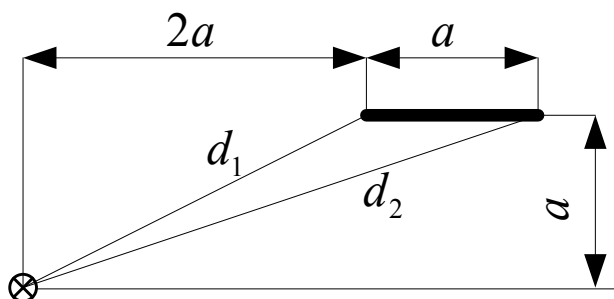
Vodič u ravni petlje stvara nehomogeno magnetsko polje koje je bliže vodiču gušće u prostoru, a sve rjeđe s povećanjem udaljenosti:

$$d\Phi = B \cdot dS = B \cdot c \cdot dx = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot x} \cdot c \cdot dx,$$

pa je ukupni tok jednak

$$\Phi = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot x} \cdot c \cdot dx = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 \cdot I \cdot c}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{a+b}{a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{2\pi} \cdot \ln 5 = 1 \cdot \ln 5 \text{ } \mu\text{Wb}.$$

76.) Potrebno je izračunati magnetski tok Φ kroz pravokutnu petlju prema slici, duljine $l = 20 \text{ cm}$ u okolini ravnog vodiča kojim teče struja $I=100 \text{ A}$.
 Koliki bi bio tok kroz petlju da je vodič u ravni petlje?



76.a) Rješenje:

Iako vodič nije u ravni petlje, može se dokazati da su za magnetski tok kroz petlju mjerodavne udaljenosti d_2 i d_1 na slici.

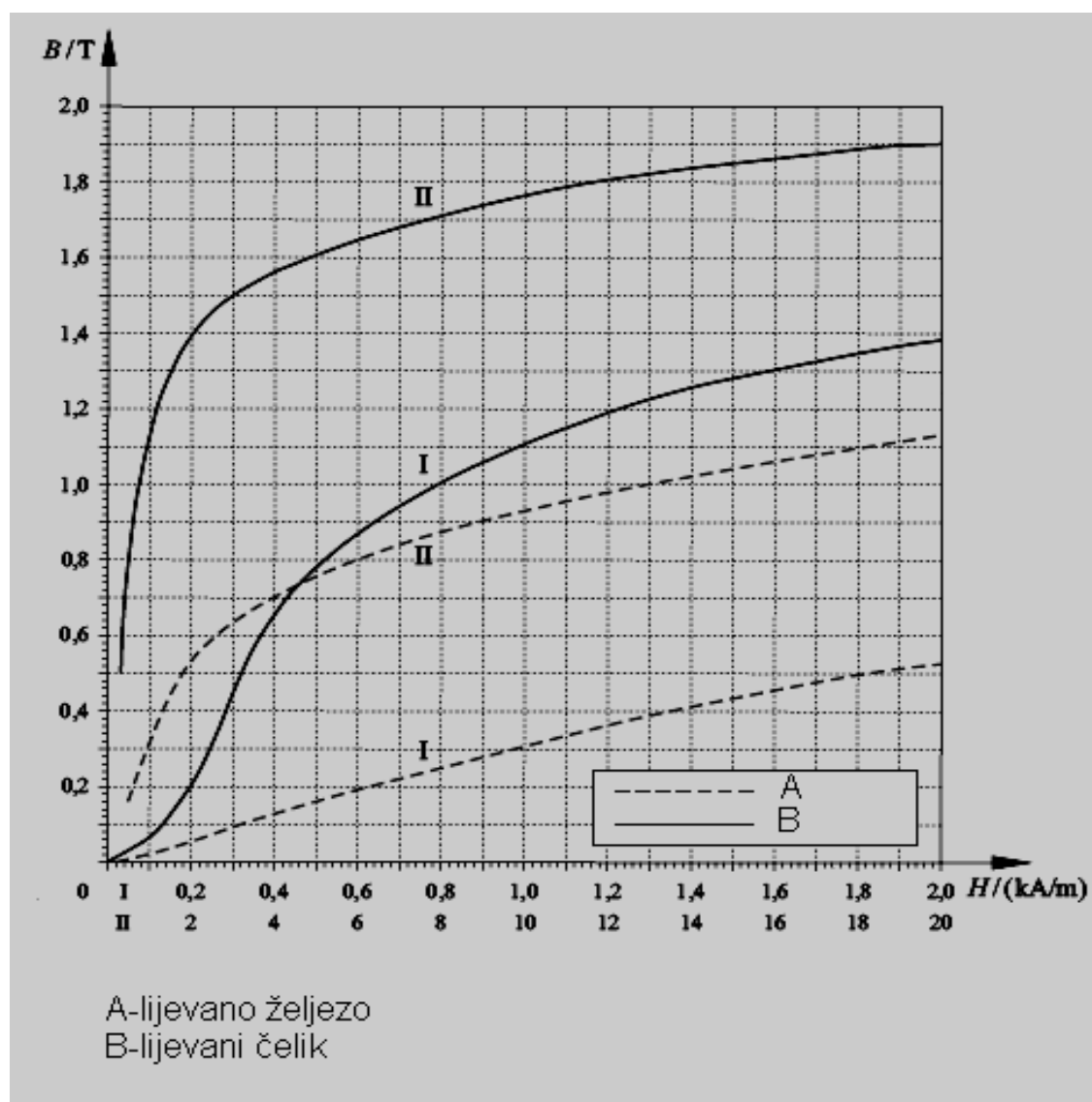
$$\Phi = \frac{I \cdot \mu_0 \cdot l}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} = \frac{I \cdot \mu_0 \cdot l}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \sqrt{2} = \frac{100 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,2}{2\pi} \cdot \ln \sqrt{2} = 0,4 \cdot \ln \sqrt{2} \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

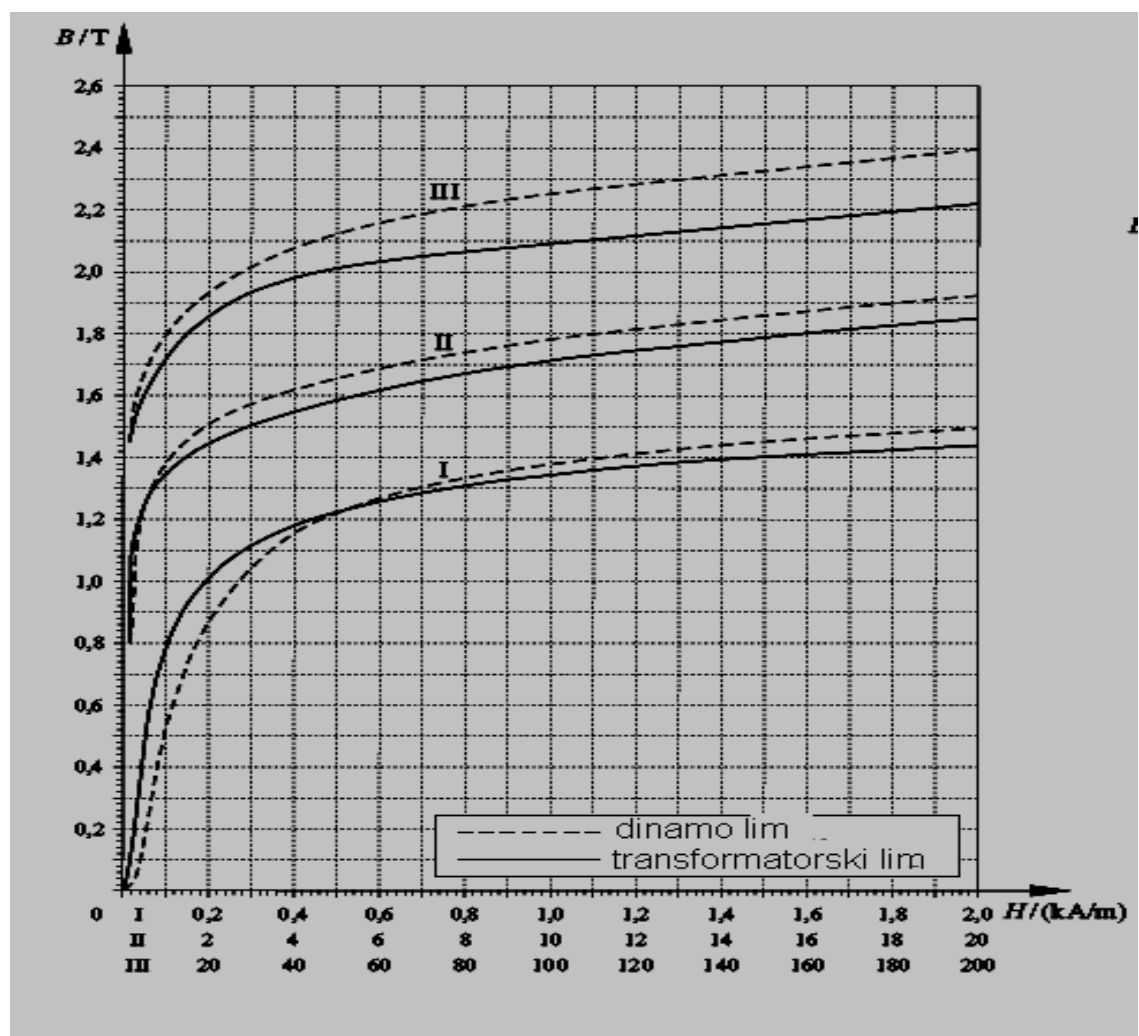
Ako je vodič u ravni petlje vrijedi izraz:

$$\Phi = \frac{I \cdot \mu_0 \cdot l}{2\pi} \cdot \ln \frac{3a}{2a} = \frac{I \cdot \mu_0 \cdot l}{2\pi} \cdot \ln 1,5 = \frac{100 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,2}{2\pi} \cdot \ln 1,5 = 0,4 \cdot \ln 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

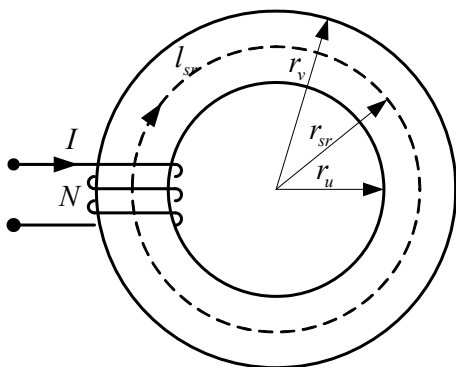
MAGNETSKI KRUGOVI

Krivulje magnetiziranja





77.) U torusnoj zavojnici od feromagnetika (prema slici) treba postojati magnetska indukcija $B = 1,4 \text{ T}$.



Ostali podatci zavojnice su:

Broj zavoja $N = 100$

Srednja dužina magnetskih silnica $l_{sr} = 20 \text{ cm}$

Presjek jezgre (efektivni) $S_{Fe} = 5 \text{ cm}^2$

$$B = f(H)$$

| B [T] | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 |
|---------|-----|-----|-----|------|------|
| H [A/m] | 380 | 500 | 750 | 1200 | 1900 |

Kolika struja mora teći zavojnicom da se ostvari zadana indukcija u jezgri ?

77.a) Rješenje:

Amperov zakon protjecanja za magnetski krug je:

$$\sum_i H_i \cdot l_i = \sum_j I_j \cdot N_j \quad \text{Za ovaj konkretni slučaj vrijedi: } I \cdot N = H \cdot l_{sr}$$

$$\text{Slijedi da je: } I = \frac{H \cdot l_{sr}}{N};$$

Jakost magnetskog polja H se odredi iz odgovarajuće krivulje magnetiziranja koju za određeni magnetski materijal daje proizvođač. U ovom slučaju veza magnetske indukcije B i magnetskog polja H je dana tabelarno.

Iz tablice za $B=1,4 \text{ T}$ očitamo $H=1200 \text{ A/m}$.

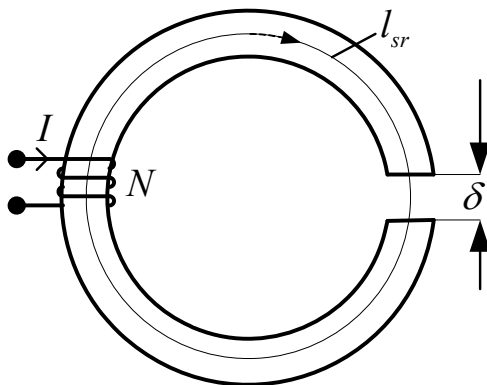
Potrebna struja kroz zavoje iznosi:

$$I = \frac{1200 \cdot 0,2}{100} = 2,4 \text{ A} ;$$

Magnetski tok u jezgri iznosi:

$$\Phi = B \cdot S_{Fe} = 1,4 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ Vs}$$

78.) Kolika je struja potrebna za održavanje istog magnetskog toka ako se jezgra na jednom mjestu prereže (prema slici), tako da je širina zračnog raspora $\delta = 1 \text{ mm}$?



78.a) Rješenje:

U računu se uzima da je $l_{sr} - \delta \cong l_{sr}$.

Amperov zakon protjecanja za ovaj slučaj izgleda: $I \cdot N = H_{Fe} \cdot l_{sr} + H_{zraku} \cdot \delta$.

Kroz feromagnetski dio jezgre praktično prolazi isti tok kao i kroz zračni raspor pa je u tom slučaju $B_{Fe} = B_{\delta}$.

Jakost magnetskog polja u zračnom rasporu iznosi:

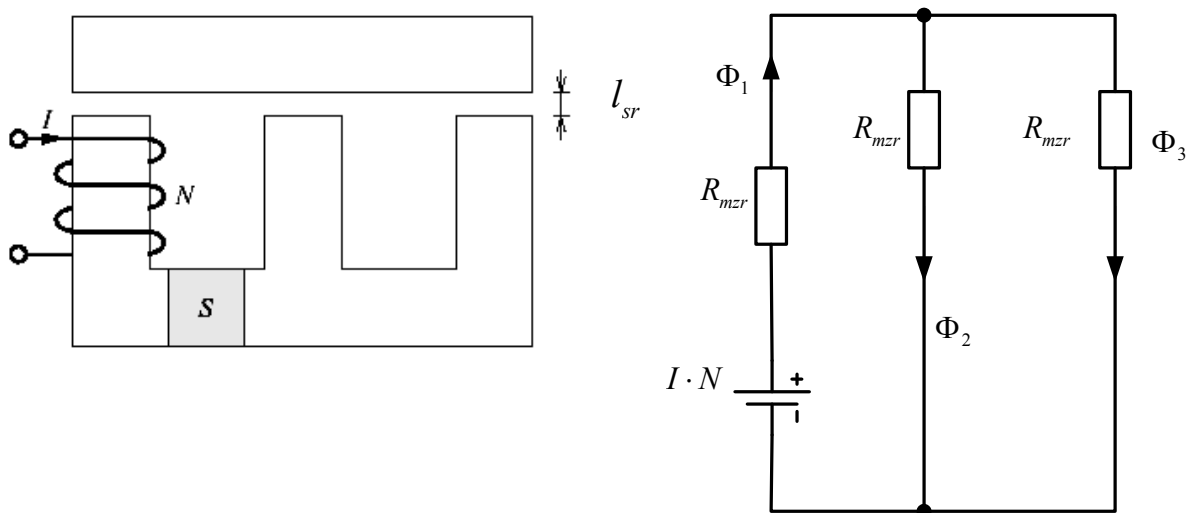
$$H_{\delta} = \frac{B_{\delta}}{\mu_0} = \frac{B_{\delta} \cdot 10^7}{4\pi} = \frac{1,4 \cdot 10^7}{4\pi} = 1,114 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Potrebna struja sada iznosi:

$$I = \frac{H_{Fe} \cdot l_{sr} + H_{\delta} \cdot \delta}{N} = \frac{1200 \cdot 0,2 + 1,114 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{100} = \frac{240 + 1114}{100} = 13,54 \text{ A}$$

Zbog samo 1 mm zračnog raspora struja se mora povećati više od 5 puta da bi se u jezgri zadržala ista magnetska indukcija. Naravno, uzrok tome je veliki magnetski otpor zraka.

79.) Za magnetski krug na slici treba izračunati iznos magnetske indukcije u srednjem stupu. Ako je poznata širina zračnih raspora $l_{zr} = 2,5 \text{ mm}$, površina presjeka svakog od tri stupa iznosi: $S = 5 \text{ cm}^2$. Na lijevom stupu je namotano $N = 6000$ zavoja kroz koje teče struja $I = 1 \text{ A}$. Magnetski otpori feromagnetskih dijelova jezgre su zanemarivi u usporedbi s magnetskim otporima zračnih raspora.



Ekvivalentna shema magnetskog kruga

79.a) Rješenje:

Magnetski otpor zraka se izračunava prema izrazu: $R_{mzr} = \frac{l_{zr}}{\mu_0 \cdot S}$, ako je l_{zr} duljina silnica kroz zračni raspor, a S površina jezgre.

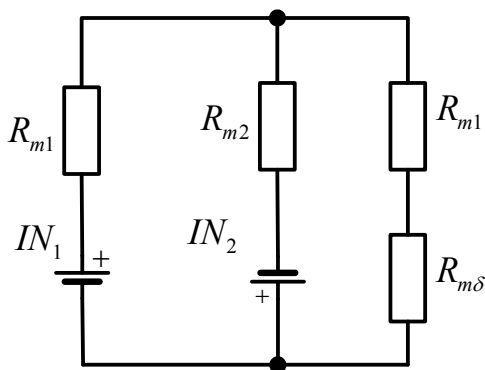
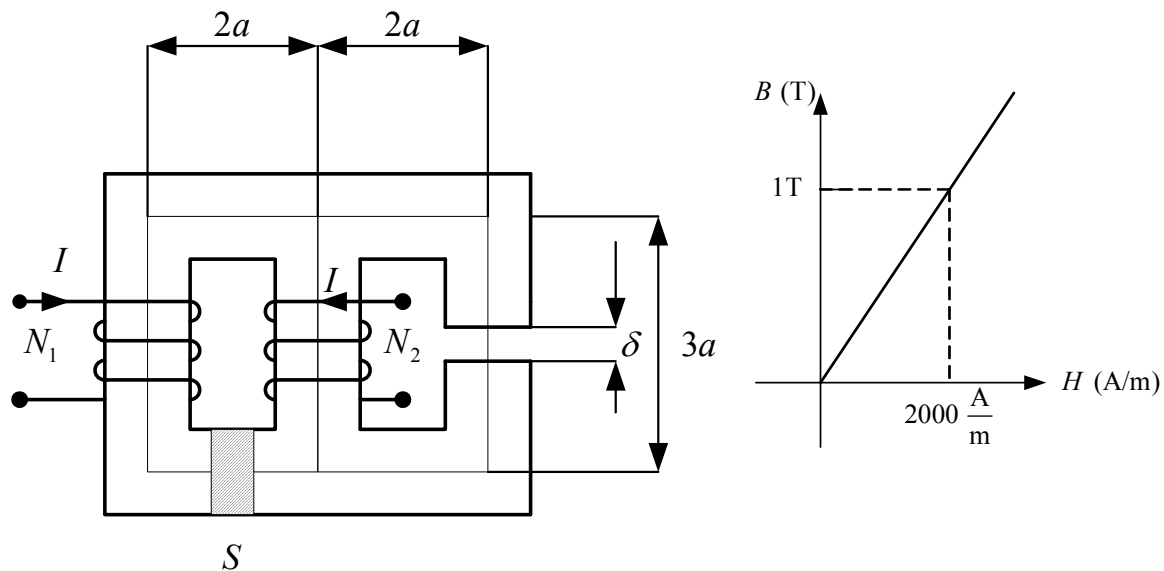
Nadalje vrijedi da je $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$; $\Phi_2 = \Phi_3$ jer su svi magnetski otpori isti.

Zato je: $\Phi_1 = 2\Phi_2$. Za lijevu petlju vrijedi: $I \cdot N = R_{mzr} \cdot \Phi_1 + R_{mzr} \cdot \Phi_2 = 3 \cdot R_{mzr} \cdot \Phi_2$

$$\Phi_2 = \frac{I \cdot N}{3 \cdot R_{mzr}}; \quad B_2 = \frac{\Phi_2}{S} = \frac{I \cdot N}{3 \cdot R_{mzr} \cdot S} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{3 \cdot l_{zr}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 10^3}{3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 0,6}{3 \cdot 2,5} \approx 1 \text{ T}$$

80.) Kolika mora biti širina zračnog raspora δ , ako je zadana magnetska indukcija $B_\delta = 0,4 \text{ T}$. Poznato

je: $I = 3 \text{ A}$; $N_1 = 400$; $N_2 = 600$; $S = 1 \text{ cm}^2$; $a = 2 \text{ cm}$; $a \gg \delta$?



80.a) Rješenje: Najprije treba izračunati magnetske otpore pojedinih dijelova magnetskog kruga.

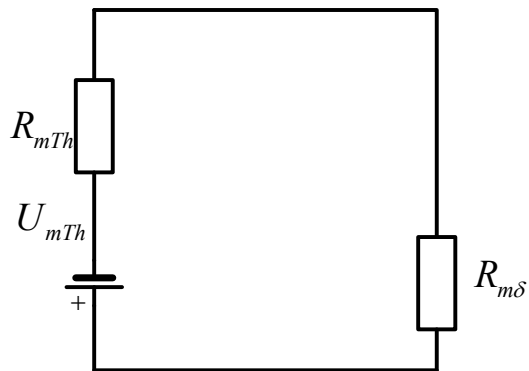
$$R_{m1} = \frac{l}{\mu \cdot S} = \frac{7a}{\mu \cdot S}; \quad R_{m2} = \frac{3a}{\mu \cdot S}; \quad \mu = \frac{B}{H} = \frac{1}{2000}$$

Zadatak se može riješiti Theveninovom metodom. Theveninov napon s obzirom na $R_{m\delta}$ iznosi:

$$U_{mTh} = \frac{IN_1 \cdot \frac{1}{R_{m1}} - IN_2 \cdot \frac{1}{R_{m2}}}{\frac{1}{R_{m1}} + \frac{1}{R_{m2}}} = 0,1 \cdot I \cdot (3N_1 - 7N_2) = -900 \text{ A}.$$

Apsolutni iznos je: $U_{mTh} = 900 \text{ A}$

$$\text{Theveninov otpor iznosi: } R_{mTh} = \frac{R_{m1} \cdot R_{m2}}{R_{m1} + R_{m2}} + R_{m1} = \frac{9,1 \cdot a}{\mu \cdot S} = 36,4 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{Vs}}$$



Magnetski tok kroz zračni raspor će iznositi:

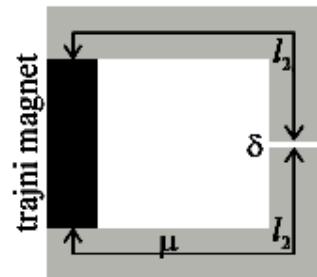
$$\Phi = \frac{U_{mTh}}{R_{mTh} + R_{m\delta}} = B \cdot S_{\delta} = 0,4 \cdot 10^{-4}; \quad 0,4 \cdot 10^{-4} = \frac{900}{36,4 \cdot 10^5 + R_{m\delta}}$$

$$0,4 \cdot R_{m\delta} \cdot 10^{-4} = 754,4; \quad R_{m\delta} = 1886 \cdot 10^4 \frac{\text{A}}{\text{Vs}};$$

$$R_{m\delta} = \frac{\delta}{\mu_0 \cdot S}; \quad \delta = R_{m\delta} \cdot \mu_0 \cdot S = 1886 \cdot 10^4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-4} = 0,00237 \text{ m}$$

Potreban zračni raspor mora iznositi: $\delta = 2,37 \text{ mm}$

81.) Jezgra na slici se sastoji od feromagnetika s permeabilnošću $\mu = 120\mu_0$ u koju je umetnut stalni magnet. U zračnom rasporu δ je izmjerena magnetska indukcija iznosa $B = 0,2 \text{ T}$. Treba odrediti iznos magnetizacije stalnog magneta ako je rasipanje toka u zračnom rasporu zanemarivo. ($l_1 = 3 \text{ cm}$; $l_2 = 6 \text{ cm}$; $\delta = 1 \text{ mm}$)



81.a) Rješenje:

Jakost magnetskog polja i magnetsku indukciju u pojedinim dijelovima magnetskog kruga moguće je zapisati kao:

$$H_{\delta} = \frac{B_{\delta}}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0} = \frac{B \cdot 10^7}{4\pi} = 795774,72 \cdot B \approx 159155; \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad H_{Fe} = \frac{B}{\mu_0 \cdot \mu} = 1326,3 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Nadalje vrijedi za stalni magnet da je: $H_1 = \frac{B}{\mu_0} - M = 795774,72 \cdot B - M$,

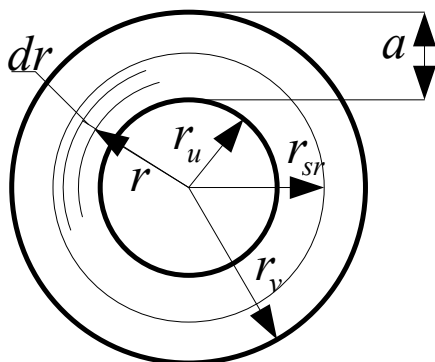
pa je $H_1 \cdot l_1 + H_{Fe} \cdot 2 \cdot l_2 + H_{\delta} \cdot \delta = 0$.

$$\text{Zato je } H_1 = -\frac{H_{Fe} \cdot 2l_2 + H_{\delta} \cdot \delta}{l_1} = \frac{1326,3 \cdot 0,12 + 159155 \cdot 0,001}{0,03} = -10610,4 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

i nadalje je magnetizacija:

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H_1 = 795774,72 \cdot 0,2 + 10610,4 = 169765 \approx 170 \frac{\text{kA}}{\text{m}}$$

82.) Zračna toroidna zavojnica ima $N = 300$ zavoja kroz koje teče struja $I = 20$ A . Presjek zavojnice je kvadratičan sa stranicom $a = 5$ cm. Srednji polumjer zavojnice je $r_{sr} = 10$ cm . Potrebno je izračunati ulančani tok zavojnice.



82.a) Rješenje: Najprije treba izračunati unutarnji i vanjski polumjer:

$$r_v = r_{sr} + \frac{a}{2} = 10 + 2,5 = 12,5 \text{ cm}; \quad r_u = r_{sr} - \frac{a}{2} = 7,5 \text{ cm}.$$

Magnetska indukcija na polumjeru r iznosi: $B_r = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{l_{sr}} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{2\pi r}$

Magnetski tok kroz površinu dS iznosi:

$$d\Phi = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{2\pi r} \cdot a \cdot dr; \quad \Phi = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N \cdot a}{2\pi} \cdot \int_{r_u}^{r_v} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N \cdot a}{2\pi} \cdot \ln \frac{r_v}{r_u}$$

Ulančani magnetski tok iznosi:

$$\psi = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N^2 \cdot a}{2\pi} \cdot \ln \frac{r_v}{r_u} = 1800 \cdot 10^{-5} \cdot 0,511 = 9,19 \text{ mWb}$$

ELEKTROMAGNETSKA INDUKCIJA

83.) Potrebno je objasniti Hallov efekt - mjerenje magnetske indukcije B

Još 1879. godine eksperimentalnim putem Edwin Hall je otkrio da se između bočnih stranica metalne pločice kojom teče struja i koja se istodobno nalazi u magnetskom polju, stvara potencijalna razlika. (Vidi sliku).

Pojednostavljeno objašnjenje ovog efekta je sljedeće:

Na elektrone (negativne naboje) koji se usmjereno gibaju u pločici (kada teče struja) djeluje magnetska sila $\vec{F}_m = -e_0 \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$. (Predznak minus dolazi zbog negativnog naboja elektrona.)

Zbog te sile dolazi do razdvajanja naboja, pa se na jednoj bočnoj strani pojavi višak elektrona, a na drugoj manjak (ili višak) pozitivnog naboja. Smjer sile na gibajući elektron u magnetskom polju određen je pravilom desnog vijka. Smjer gibanja elektrona je suprotan usvojenom tehničkom smjeru struje. (Smjer i orijentacija vektora \vec{v}).

Posljedica razdvajanja naboja je stvaranje poprečnog električnog polja \vec{E}_p između bočnih stranica. Iznos tog polja je: $E_p = v \cdot B$. Brzinu gibanja elektrona možemo izraziti kao:

$v = \frac{J}{n \cdot e_0}$ gdje je J gustoća struje, n koncentracija elektrona ($\frac{\text{broj elektrona}}{m^3}$) i e_0 naboj elektrona.

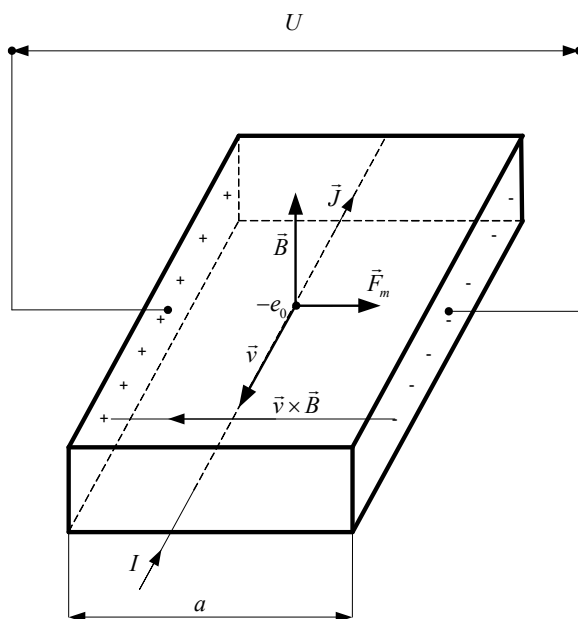
Napon koji se pojavi na bočnim stranicama može se izraziti kao:

$$U = a \cdot E_p = \frac{J \cdot a}{n \cdot e_0} \cdot B.$$

Napon koji se pojavi na bočnim stranicama pločice može se mjeriti i predstavlja poznatu veličinu.

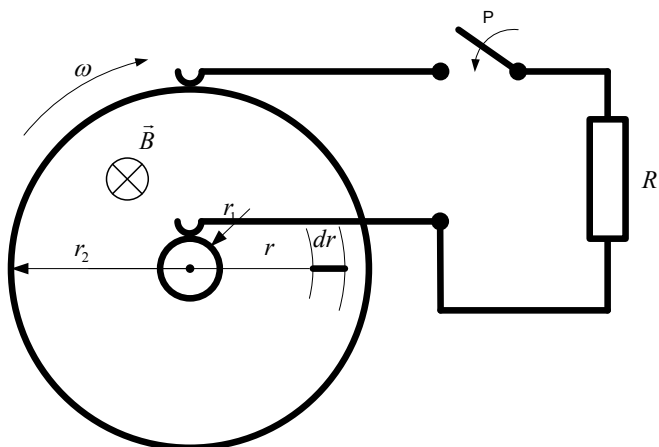
Nepoznata veličina, a to je magnetska indukcija može se izraziti kao:

$$B = \frac{n \cdot e_0}{J \cdot a} \cdot U$$



Napomena: Von Klitzing je 1985. za otkriće **kvantnog** Hallovog efekta dobio Nobelovu nagradu, što znači da je ovo pojednostavljeno objašnjenje pomoću Lorenzove sile.

84.) Metalni disk (poznat pod imenom Faradayev disk) s r_2 i r_1 prema slici rotira konstantnom kutnom brzinom ω u homogenom magnetskom polju indukcije B koje je okomito na ploču diska. Treba odrediti inducirani napon na klizačima prema slici, ako je : $B = 1 \text{ T}$; $r_2 = 20 \text{ cm}$; $r_1 = 1 \text{ cm}$. Disk se vrti sa $n = 1000 \frac{\text{okr.}}{\text{min}}$. Kolika će maksimalna struja poteći kroz otpornik $R = 10 \Omega$ ako se prekidač P zatvori ?



84.a) Rješenje:

Inducirani napon se može izraziti na diferencijalnom elementu dr virtualnog vodiča koji se proteže od r_1 do r_2 i čija je brzina gibanja $v = \omega \cdot r$.

$$dU = B \cdot v \cdot dr = B \cdot \omega \cdot r \cdot dr$$

$$\text{Ukupni inducirani napon iznosi: } U = \int_{r_1}^{r_2} B \cdot \omega \cdot r \cdot dr = \frac{B \cdot \omega}{2} \cdot (r_2^2 - r_1^2)$$

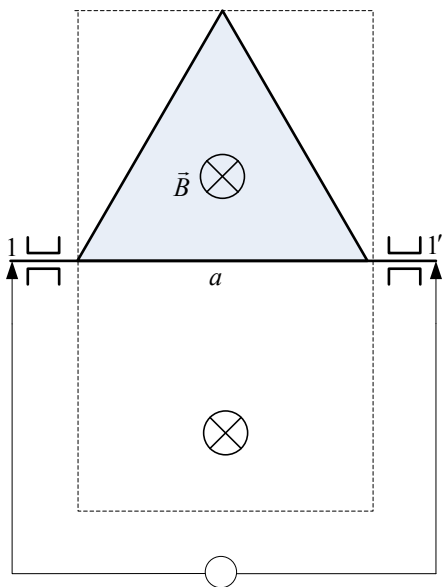
Ako se disk vrti s $n = 1000 \frac{\text{okr.}}{\text{min}}$, znači da njegova kutna brzina iznosi:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 1000}{30} = 104,72 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\text{Inducirani napon iznosi: } U = \frac{B \cdot \omega}{2} \cdot (r_2^2 - r_1^2) = \frac{1 \cdot 104,72}{2} \cdot (400 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-4}) = 2,089 \text{ V}$$

$$\text{Maksimalna struja će biti: } I = \frac{U}{R} = \frac{2,089}{10} = 0,21 \text{ A}$$

85.) Potrebno je izračunati potrebni iznos magnetske indukcije B , da bi se u zavojnici inducirao napon maksimalne vrijednosti $U_{\max} = 10 \text{ V}$, ako je vektor magnetske indukcije okomit na os vrtnje zavojnice koja ima oblik istostraničnog trokuta s $a = 10 \text{ cm}$ i $N = 500$ zavoja. Zavojnica rotira oko osi $1-1'$ kutnom brzinom $\omega = 100 \text{ rad/s}$.



85.a) Rješenje: Inducirana EMS u zavojnici se izrazi kao:

$e = -N \cdot \frac{d\Phi_\alpha}{dt}$, gdje je $\Phi_\alpha = B \cdot S \cdot \cos \alpha$, pa je:

$$e = -\frac{N \cdot B \cdot S \cdot d(\cos \alpha)}{dt} = -\frac{N \cdot B \cdot S \cdot d(\cos \omega t)}{dt} = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) = N \cdot \Phi_{\max} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$

Površina rotirajuće petlje u homogenom magnetskom polju iznosi:

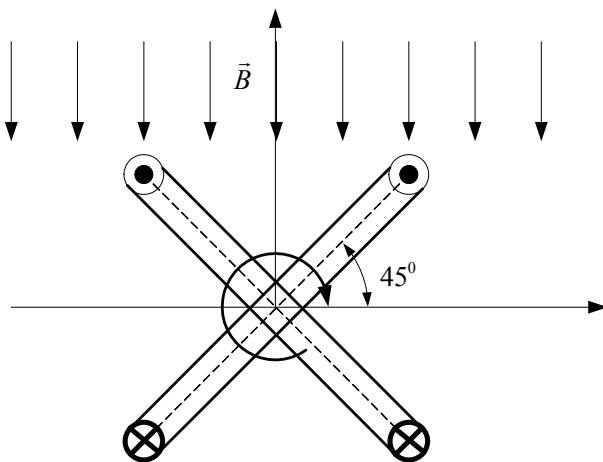
$$S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{10^{-2} \cdot \sqrt{3}}{4} = 0,433 \cdot 10^{-2}$$

Slijedi da je:

$$N \cdot B \cdot S \cdot \omega = E_{\max}; \quad B = \frac{E_{\max}}{N \cdot S \cdot \omega} = \frac{10}{500 \cdot 0,433 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2} = 46,2 \text{ mT}$$

86.) Treba zapisati vremensku promjenu induciranog napona koji se inducira u okomito postavljnim zavojnicama serijski sglasno spojenima, a rotiraju kutnom brzinom

$\omega = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ u homogenom magnetskom polju indukcije $B = 0,3 \text{ T}$. Površina svake zavojnice je 12 cm^2 , a broj zavoja iznosi 500. Položaj zavojnica u vremenu $t = 0$ je prikazan na slici.



86.a) Rješenje: Ulančani magnetski tok kroz zavojnice se zapisuje kao:

$$\psi_t = N \cdot B \cdot S \cdot \left[\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

Primjenom adicijskog teorema $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$ izlazi da je:

$$\psi_t = -\sqrt{2} \cdot N \cdot B \cdot S \cdot \sin(\omega t)$$

Inducirani napon u zavojnicama iznosi:

$$u = -\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{2} \cdot N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

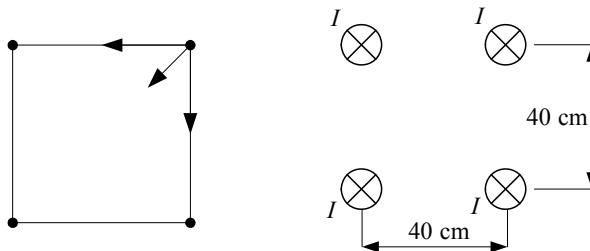
Amplituda napona iznosi:

$$\sqrt{2} \cdot 500 \cdot 0,3 \cdot 12 \cdot 10^{-4} \cdot 10^2 = 25,45 \text{ (V)}$$

$$u = 25,45 \cdot \cos(100t)$$

SILA, RAD I ENERGIJA U MAGNETSKOM POLJU

87.) Potrebno je izračunati silu na gornji desni vodič u dužini 50 m. Snop paralelnih vodiča vodi ukupnu struju 2000 A.



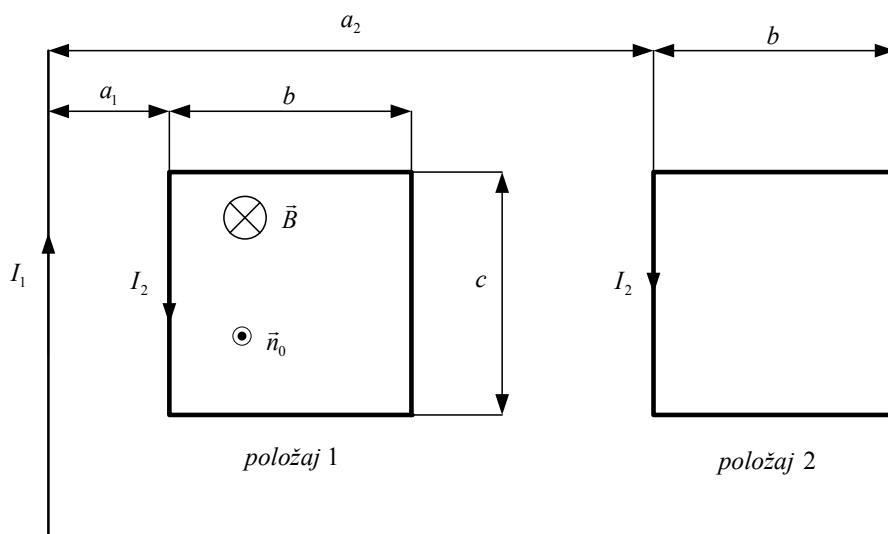
87.a) Rješenje:

Općeniti izraz za silu koja djeluje između dvaju paralelnih vodiča kojima teku struje

$$I_1 \text{ i } I_2 \text{ međusobno razmaknutih za } r(m) \text{ je: } F_m = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2r\pi} \cdot I_2 \cdot l$$

$$\text{Zato vrijedi: } F_{m-uk} = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\mu_0 \cdot 500^2 \cdot 50}{2 \cdot \pi \cdot 0,4} \right) + \left(\frac{\mu_0 \cdot 500^2 \cdot 50}{2 \cdot \pi \cdot 0,4 \cdot \sqrt{2}} \right) = 13,3 \text{ N}$$

88.) Treba odrediti rad potreban za premještanj strujne konture iz položaja 1 u položaj 2 prema slici. Zadano je: $I_1=10 \text{ A}$; $I_2=2 \text{ A}$; $a_1=10 \text{ cm}$; $b=20 \text{ cm}$; $a_2=50 \text{ cm}$; $c=50 \text{ cm}$;



88.a) Rješenje:

Izvršeni rad se izračuna prema izrazu: $A = I \cdot (\Phi_2 - \Phi_1)$

S obzirom na orijentacije vektora \vec{B} i \vec{n}_0 , magnetski tokovi su negativni pa izraz prelazi u oblik $A = I \cdot (\Phi_1 - \Phi_2)$

Magnetski tok konture u položaju 1 i položaju 2 izračunava se prema poznatom izrazu:

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot c}{2\pi} \cdot \ln \frac{a_1 + b}{a_1}; \quad \Phi_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot c}{2\pi} \cdot \ln \frac{a_2 + b}{a_2}, \text{ pa je:}$$

$$A = I_2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot c}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{a_1 + b}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2 + b} \right) = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot c}{2\pi} \cdot \ln \frac{a_2 \cdot (a_1 + b)}{a_1 \cdot (a_2 + b)} = 20 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{15}{7} = 1,524 \mu J$$

Rad su obavile magnetske sile sustava pa je rad pozitivan.

89.) U vodiču u ravnini pravokutne petlje pojavi se strujni impuls trokutastog oblika. Koliko topline se oslobodi na otporniku, ako se zanemari pojava samoindukcije?

89.a) Rješenje:

U petlji se inducira napon čiji se apsolutni iznos (koji je mjerodavan za stvaranje topline) izračunava se prema poznatom izrazu:

$$u_i = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{2\pi} \cdot \frac{di}{dt} \cdot \ln \frac{3}{1} = (8 \cdot 10^{-9} \cdot \ln 2) \cdot \frac{di}{dt} = 8,788 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{di}{dt}$$

Iz slike je vidljivo da je $\frac{di}{dt} = \frac{100 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-6}}$, pa je $u_i = u_R = 8,788 \cdot 10^{-9} \cdot 100 \cdot 10^9 \approx 879 \text{ V}$.

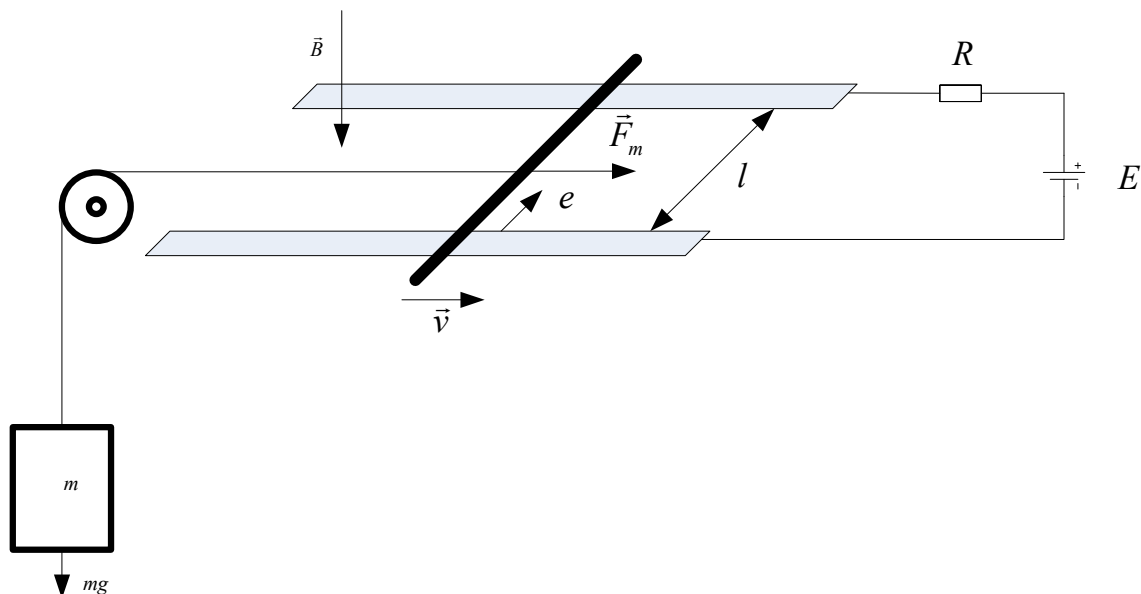
$u_i = u_R$ zbog toga što je zanemarena samoindukcija. Iznos napona na otporniku je

konstantan za cijelo vrijeme trajanja impulsa pa je $P_R = \frac{u_R^2}{R} = \frac{879^2}{2} = 386320 \text{ W}$.

Energija, realizirana u vremenu $2 \mu s$ koja se pretvori u toplinu, iznosi:

$$W = P \cdot t = 386320 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 0,77264 \text{ J}$$

90.) Potrebno je izvesti izraz za maksimalnu brzinu i snagu koja je potrebna za podizanje tereta mase m , ako se zanemari trenje.



90.a) Rješenje: Sustav postaviti u stanje da vodič miruje i priključiti izvor E . Kroz vodič će poteći maksimalna struja: $I_0 = \frac{E}{R}$, gdje je R otpor čitavog strujnog kruga. Na

vodič će u tom slučaju djelovati magnetska sila $F_{m0} = I_0 \cdot B \cdot l = \frac{E}{R} \cdot B \cdot l$ koja djeluje s obzirom na smjer struje, tako da dolazi do podizanja tereta, pod uvjetom da je $F_{m0} > mg$. Gibanjem vodiča u homogenom magnetskom polju dolazi do pojave inducirane elektromotorne sile e u vodiču čiji je smjer određen pravilom desne ruke. Sada se u petlji nalaze dva izvora koji djeluju suprotno pa će doći do smanjenja struje u skladu s: $I = \frac{E - e}{R} = \frac{E - v \cdot B \cdot L}{R}$. Naravno da će se sada smanjiti i magnetska sila na vodič, a ravnotežno stanje uspostavlja se kada se sila na vodič izjednači sa silom (težinom) tereta, tj. kada je $mg = B \cdot I \cdot l$, a I struja kroz vodič.

To znači da je: $I = \frac{mg}{Bl} = \frac{E - vBl}{R}$. Kod te struje je uspostavljena dinamička ravnoteža sila i tada je struja konstantna. Brzina koja se pojavljuje u izrazu je ujedno i najveća brzina. Pri toj je brzini uspostavljeno ravnotežno stanje. To znači da je:

$v_{\max} = \frac{E}{Bl} - \frac{R \cdot m \cdot g}{l^2 \cdot B^2}$. pri toj brzini mehanička snaga iznosi:

$$P_{\text{meh}} = F_{\text{meh}} \cdot v_{\max} = mg \cdot v_{\max} = \frac{E \cdot mg}{l \cdot B} - \frac{R \cdot (mg)^2}{l^2 \cdot B^2}.$$

Izraz za mehaničku snagu sastoji se od dva dijela: Prvi dio predstavlja snagu istosmjernje struje. (Provjerimo mjernu jedinicu.)

$$\frac{E \cdot mg}{l \cdot B} = E \cdot I \left[\frac{V \cdot N \cdot m^2}{m \cdot Vs} = \frac{V \cdot m \cdot Nm}{m \cdot Vs} = \frac{Nm}{s} = W \right]$$

Drugi dio izraza $\frac{R \cdot (mg)^2}{l^2 \cdot B^2}$ predstavlja ustvari $R \cdot I^2$

Izraz za mehaničku snagu se sada može zapisati kao: $P_{meh} = P_{el} - P_R$.

Naravno, P_{el} je koristan dio snage kojim dižemo teret, a P_R je dio ukupne snage koji se tretira kao gubitak snage. (Jouleovi gubici na otporu R koji se manifestiraju kao toplina). Potrebna snaga izvora za dizanje tereta iznosi:

$P_{el} = P_{meh} + P_R$, a maksimalna brzina pri dizanju tereta:

$$v_{\max} = \frac{E}{B \cdot l} - \frac{R \cdot m \cdot g}{l^2 \cdot B^2} = \frac{e_{v_{\max}}}{B \cdot l}$$

Ako se izvor E na slici isključi iz kruga (petlja je zatvorena preko R), štap bi se gibao

maksimalnom apsolutnom brzinom prema izrazu: $v_{\max 1} = \frac{R \cdot m \cdot g}{l^2 \cdot B^2}$, pri čemu bi se teret spuštao. Pri toj brzini u štapu se inducira elektromotorna sila:

$$e = Blv_{\max 1} = B \cdot l \cdot \frac{R \cdot mg}{l^2 \cdot B^2} = \frac{R \cdot (mg)}{l \cdot B}$$

91.) Potrebno je izračunati masu utega koji se mora spuštati maksimalnom brzinom

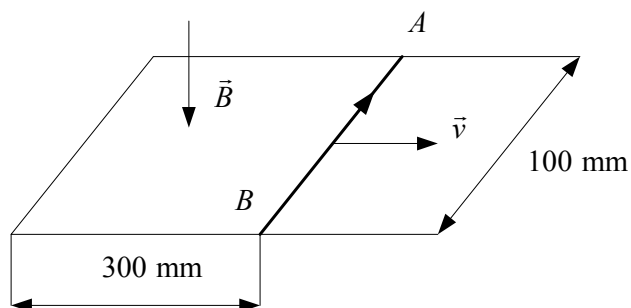
$v = 1 \frac{m}{s}$ ako se štap (na slici iz prethodnog zadatka) duljine 50 cm nalazi u homogenom polju $B = 1 \text{ T}$. Ukupni otpor petlje u kojoj se nalazi štap iznosi $R = 0,05 \Omega$.

91.a) Rješenje:

$$\text{Iz } v_{\max 1} = \frac{R \cdot m \cdot g}{l^2 \cdot B^2} \text{ slijedi da je: } m = \frac{v_{\max 1} \cdot l^2 \cdot B^2}{R \cdot g} = \frac{1 \cdot 0,25 \cdot 1}{0,05 \cdot 10} = 0,5 \text{ kg}$$

92.) Stranica AB pravokutnog okvira izvedenog iz bakrene žice promjera $d = 2 \text{ mm}$ i vodljivosti $\chi = 57 \frac{\text{Sm}}{\text{mm}^2}$ kreće se brzinom $\vec{v} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ u homogenom magnetskom polju indukcije $\vec{B} = 0,5 \text{ T}$. Magnetsko polje je okomito na površinu okvira. Potrebno je izračunati:

- iznos induciranog napona u vodiču
- jakost struje kroz okvir
- mehaničku silu potrebnu za gibanje stranice
- odrediti smjer sile na vodič



92.a) Rješenje: Budući je kut između \vec{v} i \vec{B} 90° , inducirano električno polje

iznosi: $\vec{E}_i = (\vec{v} \times \vec{B}) = v \cdot B \cdot \sin 90^\circ = 6 \cdot 0,5 \cdot 1 = 3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ i po pravilu desnog vijka ima smjer od

B prema A. (Zarotirati vektor \vec{v} prema vektoru \vec{B} po kraćem putu i pratiti gibanje desnog vijka.). Inducirani napon u točki A ima +. (Štap se ponaša kao izvor i struja izlazi na stezaljku A).

Inducirani napon iznosi:

$$U_i = E_i \cdot l = 3 \cdot 0,1 = 0,3 \text{ V}$$

Struja se zatvara kroz krug koji čine 3 stranice petlje i štap kao izvor.

Ukupni otpor tog kruga je: $R = \frac{l_u}{\chi \cdot S}$, gdje je $l_u = 2 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,1 = 0,8 \text{ m}$ i

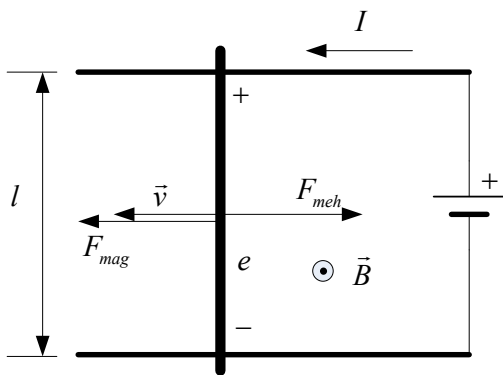
$$S = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{4 \cdot \pi}{4} = \pi \text{ mm}^2, \text{ pa je } R = \frac{0,8}{57 \cdot \pi} = 0,00446 \Omega.$$

$$\text{Struja kruga iznosi: } I = \frac{U_i}{R} = \frac{0,3}{0,00446} = 67,26 \text{ A}$$

$$\text{Potrebna sila za gibanje vodiča iznosi: } F = B \cdot I \cdot l = 0,5 \cdot 0,1 \cdot 67,26 = 3,36 \text{ N}$$

Smjer sile na vodič je suprotno orijentiran od vektora brzine.

93.) Kratki metalni vodič dužine l i otpora R_v spojen je preko metalnih tračnica na izvor istosmjernog napona. Kontura se nalazi u homogenom magnetskom polju indukcije \vec{B} koje je okomito na njenu površinu. Otpor tračnica i unutarnji otpor izvora su zanemarivi. Kojom se brzinom giba metalni vodič ako savladava mehaničku silu od $F_{meh} = 10 \text{ N}$. ($l = 2 \text{ m}$; $E = 18 \text{ V}$; $R_v = 0,4 \Omega$; $B = 1 \text{ T}$)?



93.a) Rješenje: Električni izvor kroz konturu tjera struju koja uzrokuje gibanje vodiča jer na vodič djeluje sila $F = B \cdot I \cdot l$. Po pravilu lijeve ruke magnetska sila je orijentirana ulijevo. Kretanje vodiča u magnetskom polju, u vodiču uzrokuje inducirani napon $e = B \cdot l \cdot v$. Sada za konturu vrijedi zakon petlje. $E - e = I \cdot R_v$, u kojem je R_v otpor vodiča koji se giba. To znači da će se početna struja, koja je tekla u stanju mirovanja, sada smanjiti prema $I = \frac{E - e}{R_v} = \frac{E - Blv}{R_v}$. Naravno, da bi došlo do gibanja vodiča u

naznačenom smjeru, mora biti zadovoljen uvjet da je magnetska sila veća od mehaničke koja se opire gibanju, a taj je uvjet ispunjen jer je $F_{mag} = I_0 \cdot l \cdot B = 45 \cdot 2 \cdot 1 = 90 \text{ N}$ što je veće od 10 N .

Vodič se počinje kretati, njegova brzina raste, a struja pada pa i magnetska sila. Proces teče tako dugo dok se sile međusobno ne izjednače, tj. dok magnetska sila ne poprimi

vrijednost 10 N . Tada krugom teče struja $I = \frac{F}{B \cdot l} = \frac{10}{1 \cdot 2} = 5 \text{ A}$, a inducirani napon u

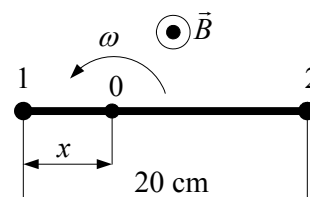
vodiču tada iznosi: $e = E - I \cdot R_v = 18 - 5 \cdot 0,4 = 16 \text{ V}$.

$$\text{Brzina vodiča iznosi: } v = \frac{e}{B \cdot l} = \frac{16}{1 \cdot 2} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Bilanca snaga: Izvor daje snagu $E \cdot I = 18 \cdot 5 = 90 \text{ W}$. Snaga koja pokreće vodič je $e \cdot I = 16 \cdot 5 = 80 \text{ W}$. Razlika snage od 10 W se gubi na otporu vodiča i pretvara se u toplinu, a iznosi $I^2 \cdot R_v = 25 \cdot 0,4 = 10 \text{ W}$, pa je: $90 \text{ W} = 80 \text{ W} + 10 \text{ W}$

Primjer koji je obrađen odnosi se na ponašanje opterećenog istosmjernog elektromotora priključenog na izvor istosmjernog napona.

94.) Kovinski štap (na slici) dužine 20cm vrtimo kutnom brzinom $\omega = 200\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ pravokutno na smjer magnetske indukcije $B = 0,1\text{T}$ oko osi 0. Treba odrediti apsolutni iznos induciranog napona na krajevima štapa ako je $x = 6\text{ cm}$.



94.a) Rješenje: Inducirani napon u diferencijalnom dijelu štapa zapisuje se kao:

$dU = B \cdot v_r \cdot dr = B \cdot \omega \cdot r \cdot dr$ pa se na nekoj dužini štapa pojavi napon:

$$U_{20} = \frac{B \cdot \omega}{2} \cdot (0,2 - x)^2; \quad U_{10} = \frac{B \cdot \omega}{2} \cdot x^2$$

$$U_{20} = \frac{B \cdot \omega}{2} \cdot (0,2 - x)^2; \quad U_{20} = 0,61575 \text{ V}; \quad U_{10} = 0,11309 \text{ V}$$

$$U_{21} = 0,61575 - 0,11309 = 0,503 \text{ V}$$

INDUKTIVITET I MEĐUINDUKTIVITET

95.) Mjerenjem je utvrđen induktivitet vodiča dvovoda $L = 10 \text{ mH}$. Duljina dvovoda iznosi $l = 10 \text{ km}$, a promjer vodiča iznosi $r = 1 \text{ cm}$. Potrebno je izračunati razmak vodiča d .

95.a) Rješenje:

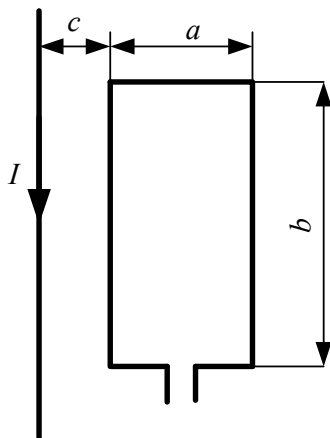
Iz izraza za induktivitet vodiča dvovoda $L = \frac{\mu_0 \cdot l}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\ln \frac{d}{r} + 0,25 \right)$ slijedi:

$$10 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 10^4 \cdot \left(\ln \frac{d}{r} + 0,25 \right), \text{ ili}$$

$$5 = \ln \frac{d}{0,01} + 0,25; \quad \ln \frac{d}{0,01} = 4,75; \quad \frac{d}{r} = 115,584$$

Razmak između vodiča iznosi: $d = 115,584 \cdot 0,01 = 1,15 \text{ m}$

96.) Pravokutna petlja s $N = 1000$ zavoja dimenzija $a = 20 \text{ cm}$ i $b = 10 \text{ cm}$ leži u ravnini vrlo dugog i tankog vodiča kojim teče struja I . Vodič je od bliže stranice petlje udaljen 5 cm . Koliki je međuinduktivitet sustava vodič-petlja?



96.a) Rješenje:

Međuinduktivitet je definiran kao omjer ulančanog toka kroz petlju i struje koja je stvorila taj tok. Zato je:

$$M = \frac{N \cdot \Phi}{I} = \frac{N \cdot \mu_0 \cdot I \cdot b}{2\pi \cdot I} \cdot \ln \frac{a+c}{c} = 1000 \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot 0,2 \cdot \ln \frac{15}{5} = 400 \cdot 10^{-7} \cdot \ln 3 = 43,94 \text{ } \mu\text{H}$$

97.) Dvije zavojnice s $L_1 = 16 \text{ mH}$ i $L_2 = 25 \text{ mH}$ u suglasnoj vezi imaju induktivitet 61 mH, a u nesuglasnoj vezi 21 mH. Treba izračunati faktor veze sustava zavojnica.

97.a) Rješenje:

Oduzimanjem sustava jednačbi za suglasnu i nesuglasnu vezu slijedi:

$$L_s = L_1 + L_2 + 2 \cdot M$$

$$\Rightarrow L_s - L_{ns} = 4M$$

$$L_{ns} = L_1 + L_2 - 2 \cdot M$$

Međuinuktivitet sustava zavojnica iznosi:

$$M = \frac{L_s - L_{ns}}{4} = \frac{61 - 21}{4} = 10 \text{ mH}$$

$$\text{Iz } M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} \text{ slijedi } k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} = \frac{10}{4 \cdot 5} = 0,5$$

98.) Dvije iste zavojnice su u suglasnom spoju i ukupni induktivitet iznosi $L_{uk} = 25 \text{ mH}$. Koliki je induktivitet zavojnica, ako je faktor magnetske veze 1?

98.a) Rješenje:

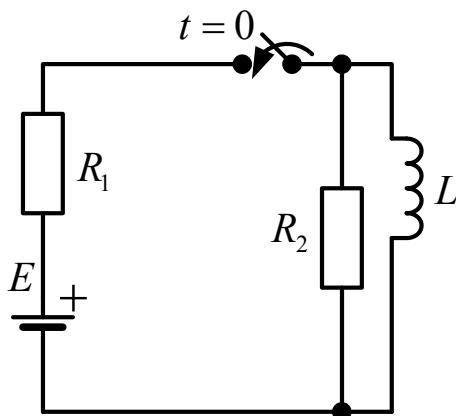
S obzirom da je: $L_1 = L_2 = L$,

$$\text{onda je: } L_{uk} = L + L + 2 \cdot k \cdot \sqrt{L \cdot L} = L + L + 2 \cdot L = 4 \cdot L$$

$$\text{iz čega slijedi da je: } L = \frac{L_{uk}}{4} = 6,25 \text{ mH}$$

PRIJELAZNE POJAVE

99.) U vremenu $t = 0$ se priključi zavojnica i otpornik na istosmjerni realni naponski izvor. U kojem trenutku će struja kroz zavojnicu biti jednaka struji kroz otpornik R_2 , u spoju na slici, ako je poznato: $E=12\text{ V}$; $R_1=1\text{ M}\Omega$; $R_2=2\text{ M}\Omega$; $L=2\text{ mH}$?



99.a) Rješenje:

Najprije odrediti početne uvjete: $i_L(t=0) = 0\text{ A}$; $i_{R_2}(t=0) = \frac{E}{R_1 + R_2}$,

jer za struju kroz zavojnicu vrijedi da je: (5.1) $i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_L(0)$

U stacionarnom stanju za $t = \infty$ vrijedi da je: $i_L(t = \infty) = \frac{E}{R_1}$; $i_{R_2}(t = \infty) = 0$

U proizvoljnom trenutku struja kroz zavojnicu iznosi: $i_L(t) = \frac{E}{R_1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

Struja kroz otpornik R_2 u trenutku t iznosi: $i_{R_2}(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

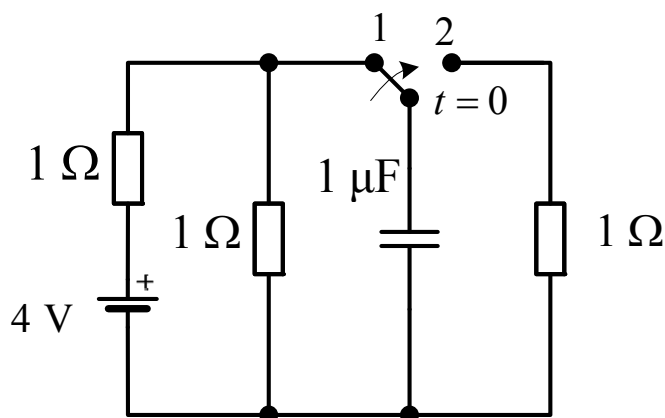
Vremenska konstanta za spoj na slici iznosi: $\tau = \frac{L}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\frac{2}{3} \cdot 10^6} = 3 \cdot 10^{-9} = 3\text{ ns}$

U zadatku se traži vrijeme t_0 u kojem je struja kroz zavojnicu i otpornik R_2 ista:

$$i_L(t_0) = i_{R_2}(t_0); \quad \frac{E}{R_1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right) = \frac{E}{R_1 + R_2} \cdot e^{-\frac{t_0}{\tau}}$$

Iz te jednadžbe slijedi da je: $t_0 = \tau \cdot \ln\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} + 1\right) = 0,86\text{ ns}$

100.) U trenutku $t = 0$, sklopka se prebaci iz položaja 1 u položaj 2. Treba odrediti napon na kondenzatoru u vremenu $2 \mu\text{s}$ nakon prebacivanja sklopke u položaj 2.



100.a) **Rješenje:** U položaju 1 kondenzator je nabijen na napon: $U_{C0} = 4 \cdot \frac{1}{1+1} = 2 \text{ V}$

U položaju 2 zbog $u_c(0_-) = u_c(0) = u_c(0_+)$ $U_{C0} = 2 \text{ V}$

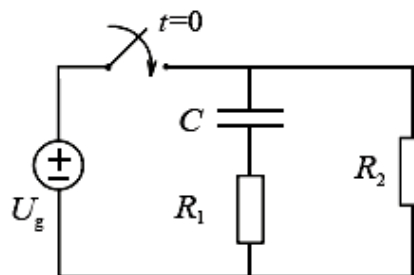
Nakon toga počinje pražnjenje kondenzatora prema $u_c = U_{C0} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

Vremenska konstanta iznosi: $\tau = R \cdot C = 1 \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 1 \mu\text{s}$

Napon na kondenzatoru nakon $2 \mu\text{s}$ po prebacivanju sklopke u položaj 2, iznosi:

$$u_c = 2 \cdot e^{-\frac{2}{1}} = 2 \cdot e^{-2} = 0,27 \text{ V}$$

101.) Sklopka na slici se zatvori u trenutku $t = 0 \text{ s}$. Treba odrediti omjer napona na kondenzatoru C i otporniku R_2 po isteku vremena $t = 2\tau$.

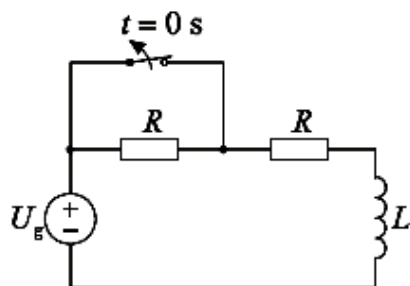


101.a) **Rješenje:** Ovdje treba primijetiti da je napon na serijskom spoju C i R_1 nakon zatvaranja sklopke stalan i jednak naponu izvora U_g . Napon na R_2 je također jednak naponu U_g . To znači da na tijek prijelazne pojave utječe vremenska konstanta $\tau = C \cdot R_1$. Punjenje kondenzatora se odvija prema izrazu:

$$u_c = U_g \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = U_g \cdot (1 - e^{-2}) \text{ pa je } \frac{u_{C(2\tau)}}{u_{R2}} = 1 - e^{-2} = 0,865$$

102.) U trenutku $t = 0$ sklopka se otvori. Treba odrediti vrijeme u kojem će magnetska energija u polju zavojnice imati još samo polovicu iznosa početne vrijednosti ako je poznato:

$$R = 1 \, \Omega; \quad L = 100 \, \text{mH}.$$



102.a) Rješenje: Nakon otvaranja sklopke započinje prijelazna pojava. Struja s vrijednosti $I_{poč} = \frac{U_g}{R}$ počinje padati na vrijednost $I_{kon} = \frac{U_g}{2R}$ koju će poprimiti u stacionarnom stanju ($t \rightarrow \infty$). Kako je magnetska energija zavojnice funkcija kvadrata struje ($W_m = \frac{i^2 \cdot L}{2}$), polovica početne magnetske energije zavojnice će se pojaviti kod struje $i = \frac{I_{poč}}{\sqrt{2}}$. Prijelaznu pojavu je moguće zapisati kao $i = A_1 + A_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$.

U trenutku $t = 0$ vrijedi da je $\frac{U_g}{R} = A_1 + A_2$. Za stacionarno stanje vrijedi da je

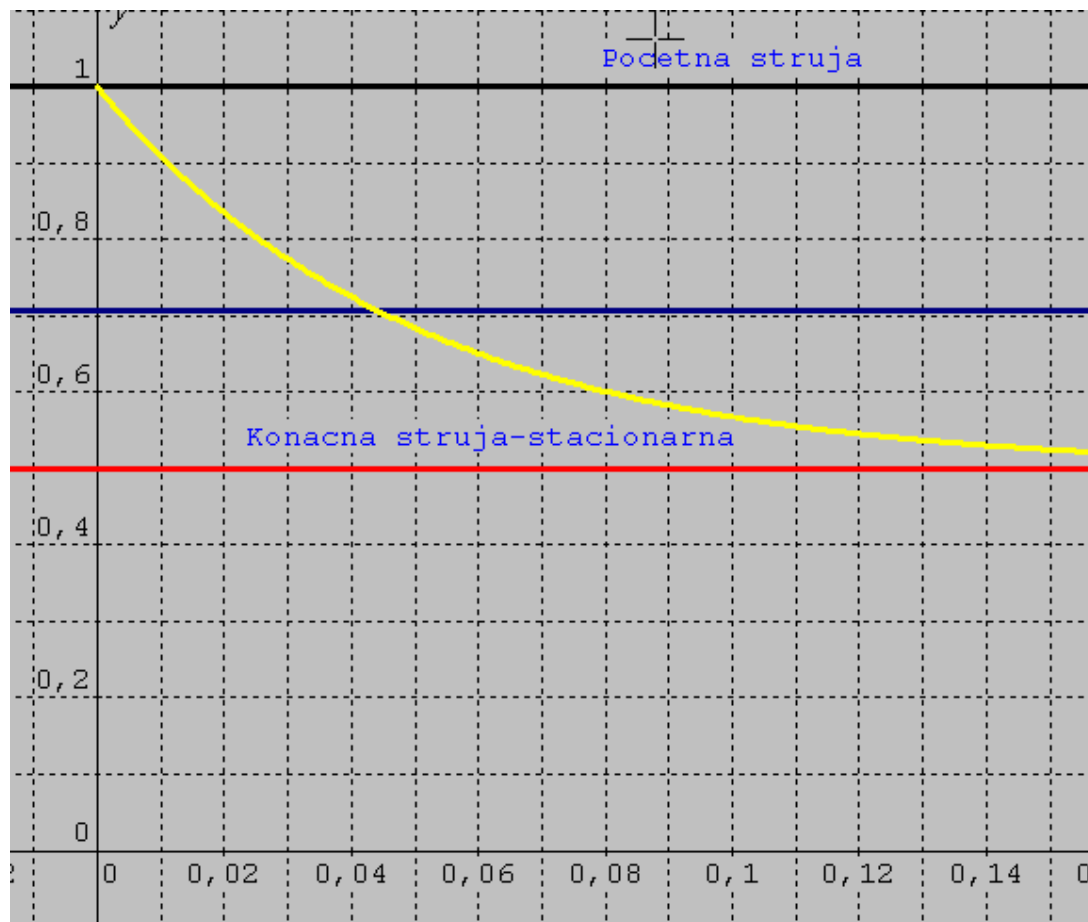
$$\frac{U_g}{2R} = A_1 + 0; \quad A_1 = \frac{U_g}{2R}, \text{ pa je } A_2 = \frac{U_g}{R} - \frac{U_g}{2R} = \frac{U_g}{2R}$$

Sada se može zapisati da je $i = \frac{U_g}{2R} \cdot (1 + e^{-\frac{t}{\tau}})$. Pri otvorenoj sklopki vremenska konstanta

$$\text{je } \tau = \frac{L}{2R}. \text{ Nadalje vrijedi da je } i(t_0) = \frac{U_g}{\sqrt{2}R} = \frac{U_g}{2R} \cdot (1 + e^{-\frac{t_0}{\tau}}) \text{ pa je } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot (1 + e^{-\frac{t_0}{\tau}}).$$

Iz toga slijedi da je

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \sqrt{2} - 1; \quad t = -\frac{L}{2R} \cdot \ln(\sqrt{2} - 1) = -0,05 \cdot (-0,88) = 0,044 \, \text{s} = 44 \, \text{ms}$$



Find Intersection ✕

Equation 1: ▼

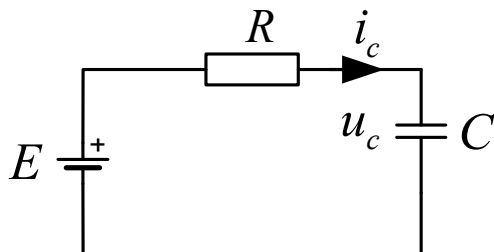
Equation 2: ▼

Guess for off-screen intersection (optional): x =

Results:

| x | y |
|--------|--------|
| 0.0441 | 0.7071 |

103.) U trenutku $t = 0$ serijski RC spoj je priključen na izvor konstantne elektromotorne sile E , pri čemu je $u_c(0) = U_0$. Kako se mijenjaju napon i struja kondenzatora ako je:
 $U_0 = 10 \text{ V}$; $E = 20 \text{ V}$; $t = 0,5 \cdot \tau$? Koliki je napon u_c ?



103a.) Rješenje: Nehomogena linearna diferencijalna jednačba za taj spoj je:

$$RC \cdot \frac{du_c}{dt} + u_c = E$$

Rješenje takove jednačbe je: $u_c = u_p + u_s = E + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

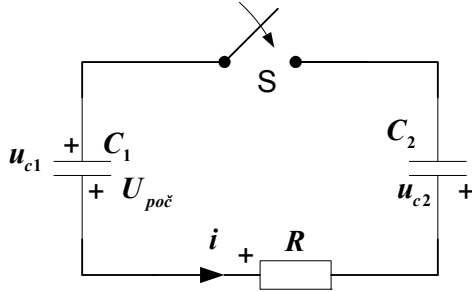
Konstantu A se određuje iz početnih uvjeta; $u_c(0) = U_0$.

$$U_0 = E + A; \quad A = U_0 - E, \text{ pa je } u_c = E + (U_0 - E) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ ili } u_c = U_0 + (E - U_0) \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\text{Struja kondenzatora iznosi: } i = C \frac{du_c}{dt} = \frac{E - u_c}{R} = \frac{E - U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_c = U_0 + (E - U_0) \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 10 + 10 \cdot (1 - e^{-0,5}) = 14 \text{ V}$$

104.) Treba odrediti izraze po kojima se mijenjaju naponi na kondenzatorima i otporniku nakon zatvaranja sklopke S za spoj prema slici, ako pri otvorenoj sklopki na kondenzatoru C_1 postoji napon $U_{poč}$ naznačenog polariteta.



104.a) Rješenje: Referentni polariteti napona na kondenzatorima i otporniku su određeni smjerom struje koju određuje početni napon na C_1 . Naponska jednačba za petlju ima oblik:

$$u_{c1} + u_{c2} + u_R = 0; \quad u_{c1}(0) + \frac{1}{C_1} \cdot \int_0^t i dt + \frac{1}{C_2} \cdot \int_0^t i dt + i \cdot R = 0$$

$$\text{Deriviranjem jednačbe se dobiva: } \frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2} + \frac{di}{dt} \cdot R = 0$$

$$\text{Napon } u_{c1}(0) = -U_{poč} = konst.$$

$$\text{Nakon sređivanja slijedi: } \frac{di}{dt} + \frac{i}{\frac{C_1 \cdot C_2 \cdot R}{C_1 + C_2}} = 0; \quad \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0,$$

$$\text{što znači da je: } \tau = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot R}{C_1 + C_2}$$

$$\text{Rješenje diferencijalne linearne jednačbe } \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \text{ je: } i = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{Konstanta A se dobiva iz početnog uvjeta: } i(0) = A \cdot e^0 = \frac{U_{poč}}{R}; \quad A = \frac{U_{poč}}{R} \text{ pa je:}$$

$$i = \frac{U_{poč}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad \text{Napon na otporniku iznosi } u_R = i \cdot R = U_{poč} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

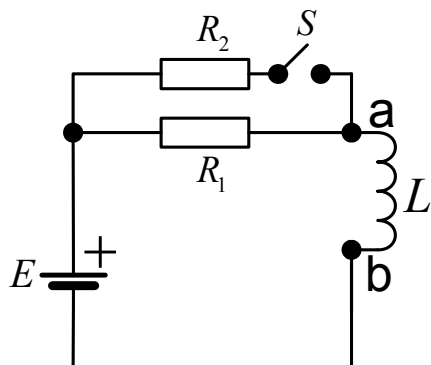
$$\text{Napon na kondenzatoru } C_1 \text{ mijenja se prema: } u_{c1} = u_{c1}(0) + \frac{1}{C_1} \cdot \int_0^t i dt$$

$$u_{c1} = -U_{poč} + \frac{1}{C_1} \cdot \frac{U_{poč}}{R} \int_0^t e^{-\frac{t}{\tau}} dt; \text{ Slijedi da je: } u_{c1} = -U_{poč} + U_{poč} \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\text{Napon na kondenzatoru } C_2 \text{ iznosi: } u_{c2} = \frac{1}{C_2} \cdot \int_0^t \frac{U_{poč}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot dt = U_{poč} \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\text{Za } t = 0 \quad u_{c1} = -U_{poč}; \quad u_{c2} = 0$$

105.) U spoju prema slici uspostavljeno je stacionarno stanje. U trenutku $t = t_1$ zatvara se sklopka S. Koliki je napon u_{AB} u tom trenutku ako je $E = 10V$; $R_1 = 10\Omega$; $R_2 = 15\Omega$?



105.a) Rješenje: U stacionarnom stanju pri otvorenoj sklopki S zavojnicom teče struja:

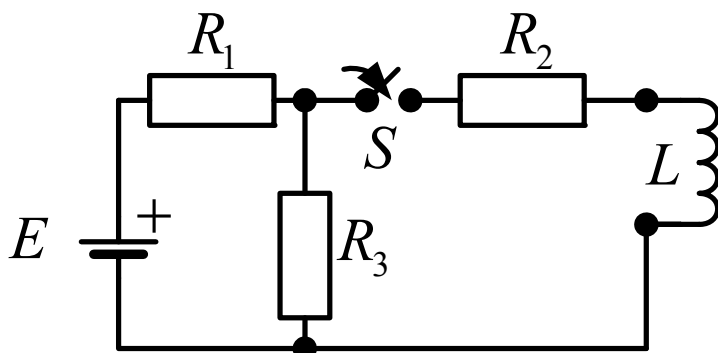
$$I = \frac{E}{R_1} = \frac{10}{10} = 1 \text{ A.}$$

S obzirom na to da za zavojnicu vrijedi: $i_L(0_-) = i_L(0) = i_L(0_+)$, u

trenutku zatvaranja sklopke S struja će iznositi 1 A. Napon u_{ab} će u tom trenutku iznositi:

$$u_{ab} = E - i \cdot R_u = 10 - 1 \cdot \frac{10 \cdot 15}{25} = 10 - 6 = 4 \text{ V}$$

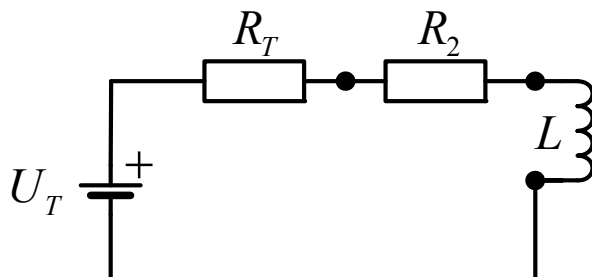
106.) Treba odrediti struju i napon za vrijeme prijelazne pojave u spoju, prema slici ako je: $R_1 = 1\text{ k}\Omega$; $R_2 = 5\text{ k}\Omega$; $R_3 = 2\text{ k}\Omega$; $L = 10\text{ mH}$; $E = 60\text{ V}$



106.a) **Rješenje:** Spoj lijevo od sklopke S se nadomješta Theveninovim spojem:

$$U_T = E \frac{R_3}{R_3 + R_1} = 60 \cdot \frac{2}{2+1} = 40\text{ V}; \quad R_T = \frac{2}{3}\text{ k}\Omega$$

Novi spoj nakon zatvaranja sklopke izgleda:



Ukupni otpor iznosi:

$$R_u = \frac{2}{3} + 5 = \frac{17}{3}\text{ k}\Omega$$

Vremenska konstanta spoja je;

$$\tau = \frac{L}{R_u} = \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 3}{17 \cdot 10^3} = \frac{30}{17} \cdot 10^{-6} = 1,76\text{ }\mu\text{s}$$

Napon na zavojnici se za vrijeme prijelazne pojave mijenja prema:

$$u_L = U_T \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 40 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad \text{Struja u stacionarnom stanju iznosi;}$$

$$I_{st} = \frac{U_T}{R_u} = \frac{40 \cdot 3}{17 \cdot 10^3} = 7,058\text{ mA}, \text{ a za vrijeme prijelazne pojave se mijenja prema:}$$

$$i = 7,058 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\text{ mA}$$

TRENUTNA, SREDNJA I EFEKTIVNA VRIJEDNOST IZMJENIČNE STRUJE

107.) Potrebno je izračunati vrijeme t koje je potrebno da trenutna vrijednost struje $i = I_{\max} \cdot \sin(\omega t)$ čija je frekvencija 50 Hz poprimi iznos:

a) efektivne vrijednosti

b) srednje elektrolitske vrijednosti

107.a) Rješenje:

$$i = I_{ef} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}; \quad \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = I_{\max} \cdot \sin(\omega t); \quad \sin(\omega t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

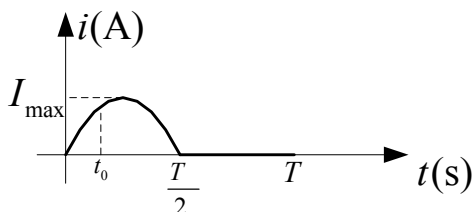
$$\omega \cdot t = \frac{\pi}{4}; \quad 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t = \frac{\pi}{4}; \quad 400 \cdot t = 1; \quad t = \frac{1}{400} = 2,5 \text{ (ms)}$$

107.b) Rješenje:

$$i = I_{sr} = \frac{2 \cdot I_{\max}}{\pi} = I_{\max} \cdot \sin(\omega t); \quad \sin(\omega t) = \frac{2}{\pi} = 0,6366; \quad \omega \cdot t = \arcsin 0,6366 = 0,69$$

$$t = \frac{0,69}{\omega} = 0,002196 \text{ (s)}; \quad t = 2,196 \text{ (ms)}$$

108.) Srednja vrijednost promjenljive struje prema slici mora iznositi 20% maksimalne vrijednosti. Potrebno je izračunati vrijeme t_0 u milisekundama, ako je frekvencija struje 50 Hz.



108.a) Rješenje: Prema definiciji srednja vrijednost promjenljive struje je:

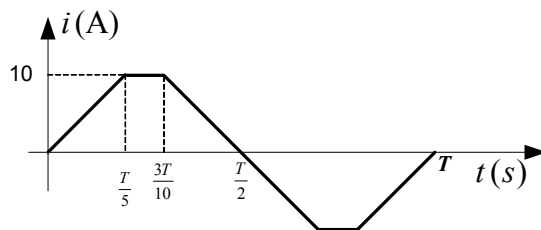
$$I_{sr} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{\frac{T}{2}} I_{\max} \cdot \sin \omega t \cdot dt = -\frac{I_{\max}}{\omega T} \cdot \cos \omega t \Big|_{t_0}^{T/2}$$

$$I_{sr} = -\frac{I_{\max}}{\omega T} \cdot (-1 - \cos \frac{2\pi \cdot t_0}{T});$$

$$0,2 I_{\max} = \frac{I_{\max}}{\omega T} \cdot (1 + \cos \frac{2\pi \cdot t_0}{T}); \quad T = 20 \text{ ms}$$

$$\cos \frac{2\pi \cdot t_0}{T} = 0,2566; \quad \frac{2\pi \cdot t_0}{T} = 1,31; \quad t_0 = 0,208 \cdot T = 4,16 \text{ ms}$$

109.) Treba odrediti faktor oblika struje čija je vremenska promjena prikazana na slici.



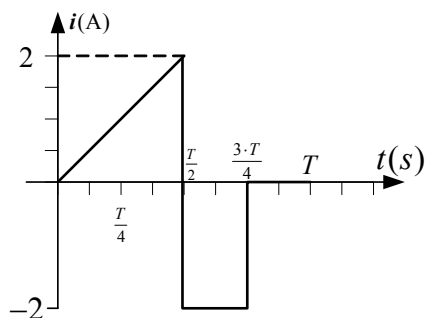
109.a) Rješenje: Faktor oblika je definiran kao omjer efektivne i srednje vrijednosti.

$$\text{Efektivna vrijednost struje iznosi: } 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot \frac{T}{5} + 10^2 \cdot \frac{T}{10} = I_{ef}^2 \cdot \frac{T}{2}; \quad I_{ef} = 6,83 \text{ A}$$

$$\text{Srednja vrijednost struje iznosi: } 2 \cdot \frac{T}{5} \cdot \frac{10}{2} + \frac{T}{10} \cdot 10 = I_{sr} \cdot \frac{T}{2}; \quad I_{sr} = 6 \text{ A}$$

$$\text{Faktor oblika je: } k_0 = \frac{I_{ef}}{I_{sr}} = \frac{6,83}{6} = 1,138$$

110.) Treba izračunati efektivnu vrijednost struje čija je vremenska promjena prikazana na slici



110a.) Rješenje:

Na intervalu $0 < t < \frac{T}{2}$ struja se mijenja prema $i = k \cdot t$, gdje je $k = \frac{2}{T} = \frac{4}{T}$ pa je:

$$i = \frac{4}{T} \cdot t; \quad i^2 = \frac{16}{T^2} \cdot t^2$$

Na intervalu $\frac{T}{2} < t < \frac{3T}{4}$ vrijedi da je: $i = -2$.

Prema definiciji efektivna vrijednost struje je:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt} \quad \text{ili} \quad I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt$$

$$\text{Za ovaj slučaj vrijedi: } I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} \frac{16}{T^2} \cdot t^2 dt + \int_{T/2}^{3T/4} 4 \cdot dt + \int_{3T/4}^T 0 \cdot dt \right]$$

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \cdot \left[\left(\frac{16}{T^2} \cdot \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{T/2} + (4 \cdot t) \Big|_{T/2}^{3T/4} + 0 \right] = \frac{1}{T} \cdot \frac{16}{T^2} \cdot \frac{T^3}{8} + \frac{1}{T} \cdot 4 \cdot \frac{T}{4} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \quad \text{A}^2$$

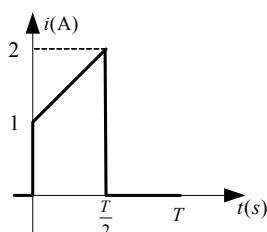
$$I_{ef} = \sqrt{\frac{5}{3}} \quad \text{A}$$

Skraćenim postupkom zadatak se može riješiti i ovako:

$$\frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \frac{T}{2} + 2^2 \cdot \left(\frac{3T}{4} - \frac{2 \cdot T}{4} \right) + 0 = I_{ef}^2 \cdot T$$

$$I_{ef}^2 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \quad \text{A}^2; \quad I_{ef} = \sqrt{\frac{5}{3}} \quad \text{A}$$

111.) Potrebno je izračunati efektivnu vrijednost struje čija je vremenska promjena prikazana na slici.



111.a) Rješenje:

$$i = \frac{2-1}{\frac{T}{2}} \cdot t + 1 = \frac{2}{T} \cdot t + 1; \quad i^2 = \frac{4}{T^2} \cdot t^2 + \frac{4}{T} \cdot t + 1$$

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} i^2 dt = \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{4}{T^2} \cdot \frac{T^3}{8} + \frac{4}{T} \cdot \frac{T^2}{2} + \frac{T}{2} \right) = \frac{7}{6};$$

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{7}{6}} \quad \text{A}$$

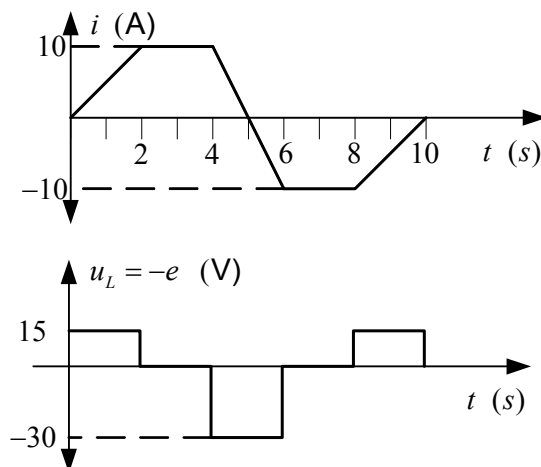
Provjera : U x,y ravnini rotacijom zadanog lika oko x osi, nastaje krnji stožac čiji se

volumen izračuna kao: $V = \frac{v \cdot \pi}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$, gdje je v visina krnjog stošca, a

r_1 i r_2 su polumjeri osnovica.

Zato vrijedi da je: $I_{ef}^2 \cdot T = \frac{1}{3} \cdot \frac{T}{2} \cdot (2^2 + 2 \cdot 1 + 1^2) = \frac{7T}{6}$, pa je: $I_{ef} = \sqrt{\frac{7}{6}} \quad \text{A}$

112.) Zavoјnicom induktiviteta $L = 3 \text{ H}$ teče struja čiji je valni oblik prikazan na slici. Kako se mijenja napon na pojedinim intervalima, kolika je srednja aritmetička, a kolika efektivna vrijednost napona na intervalu jedne periode?



Sl. 1d

112.a) Rješenje:

Napon na pojedinim intervalima računa se prema poznatom izrazu: $u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = -e$

Na intervalu $0 < t < 2 \text{ (s)}$ napon $u = 3 \cdot \frac{10}{2} = 15 \text{ (V)}$

$2 < t < 4 \text{ (s)}$ napon $u = 0 \text{ (V)}$

$4 < t < 6 \text{ (s)}$ napon $u = 3 \cdot \frac{-10 - 10}{2} = -30 \text{ (V)}$

$6 < t < 8 \text{ (s)}$ napon $u = 0 \text{ (V)}$

$8 < t < 10 \text{ (s)}$ napon $u = 3 \cdot \frac{0 - (-10)}{10 - 8} = 15 \text{ (V)}$

Srednja aritmetička vrijednost napona na intervalu jedne periode (10 s) iznosi:

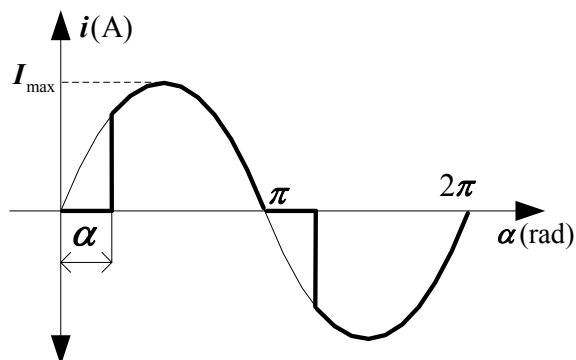
$$15 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + (-30) \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 15 \cdot 2 = U_{sr} \cdot 10; \quad U_{sr} = 0 \text{ (V)}$$

Efektivna vrijednost napona iznosi:

$$15^2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 30^2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 15^2 \cdot 2 = U_{ef}^2 \cdot 10$$

$$U_{ef} = \sqrt{270} = 16,43 \text{ V}$$

113.) Potrebno je izračunati srednju i efektivnu vrijednost struje čija je vremenska promjena prikazana na slici, za različite kutove α .



113.) Rješenje:

Iznos srednje i efektivne vrijednosti ovisi o kutu α jer je:

$$I_{sr} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\pi} I_{\max} \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{I_{\max}}{\pi} \cdot (1 + \cos \alpha)$$

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\pi} I_{\max}^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot d\alpha} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi - \alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4}}$$

| α^0 | α | $I_{sr} \text{ (A)}$ | $I_{ef} \text{ (A)}$ |
|------------|----------|--|---|
| 0 | 0 | $\frac{I_{\max} \cdot 2}{\pi} = 0,64 I_{\max}$ | $\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = 0,71 I_{\max}$ |
| 30 | $\pi/6$ | $0,59 I_{\max}$ | $0,69 I_{\max}$ |
| 45 | $\pi/4$ | $0,54 I_{\max}$ | $0,67 I_{\max}$ |
| 60 | $\pi/3$ | $0,47 I_{\max}$ | $0,63 I_{\max}$ |
| 90 | $\pi/2$ | $0,32 I_{\max}$ | $I_{\max} / 2 = 0,5 I_{\max}$ |

Iznosi srednje i efektivne vrijednosti struje za $I_{max}=1A$

| Kut u stupnjevima | Kut u radijanima | Isr (A) | Ief (A) |
|-------------------|------------------|---------|---------|
| 0 | 0,000 | 0,637 | 0,707 |
| 30 | 0,524 | 0,594 | 0,697 |
| 45 | 0,785 | 0,544 | 0,674 |
| 60 | 1,047 | 0,478 | 0,634 |
| 90 | 1,571 | 0,318 | 0,500 |
| 120 | 2,094 | 0,159 | 0,313 |
| 135 | 2,356 | 0,093 | 0,213 |
| 150 | 2,618 | 0,043 | 0,120 |
| 180 | 3,142 | 0,000 | 0,000 |

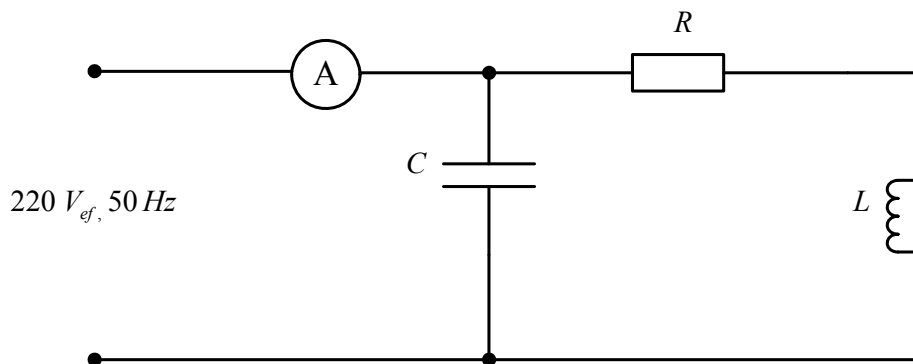
Iznosi induktivnog i kapacitivnog otpora za frekvenciju 50 Hz

| XL(ohma) | L(mH) | | Xc(ohma) | C(microF) |
|----------|-------------|---------|----------|-------------|
| 1 | 3,183091418 | f=50 Hz | 1 | 3183,091418 |
| 2 | 6,366182837 | | 2 | 1591,545709 |
| 3 | 9,549274255 | | 3 | 1061,030473 |
| 4 | 12,73236567 | | 4 | 795,7728546 |
| 5 | 15,91545709 | | 5 | 636,6182837 |
| 6 | 19,09854851 | | 6 | 530,5152364 |
| 7 | 22,28163993 | | 7 | 454,7273455 |
| 8 | 25,46473135 | | 8 | 397,8864273 |
| 9 | 28,64782277 | | 9 | 353,6768243 |
| 10 | 31,83091418 | | 10 | 318,3091418 |

**STRUJNI KRUGOVI IZMJENIČNE STRUJE, REZONANCIJA, SNAGA,
KOMPENZACIJA JALOVE SNAGE I ENERGIJE**

114.) Koliko pokazuje idealni A-metar u spoju prema slici 1f ako je:

$R = 30 \, \Omega$; $C = 100 \, \mu\text{F}$; $L = 0,1 \, \text{H}$?



Sl. 1f

114.a) Rješenje:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{314 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 31,847 \, \Omega; \quad X_L = \omega \cdot L = 31,4 \, \Omega$$

Impedancija spoja iznosi;

$$Z = \frac{(-jX_C) \cdot (R + jX_L)}{R + jX_L - jX_C} = \frac{(-j31,847) \cdot (30 + j31,4)}{30 - j0,447} = \frac{-j955,41 + 999,99}{30} = 33,333 - j31,847$$

$$|Z| = 46,10 \, \Omega$$

Idealni A-metar pokazuje: $I = \frac{U}{|Z|} = \frac{220}{46,10} = 4,77 \, \text{A}$

Rješenje u MATLAB-u

R=30;C=100e-6;L=0.1;f=50;U=220;

XL=2*pi*f*L

ZRL=R+i*XL

XC=1/(2*pi*f*C)

Zu=ZRL*(-i*XC)/(ZRL-i*XC)

I=U/Zu

Ia=abs(I)

>> XL =

31.4159

ZRL =

30.0000 +31.4159i

XC =

31.8310

Zu =

33.7673 -31.3638i

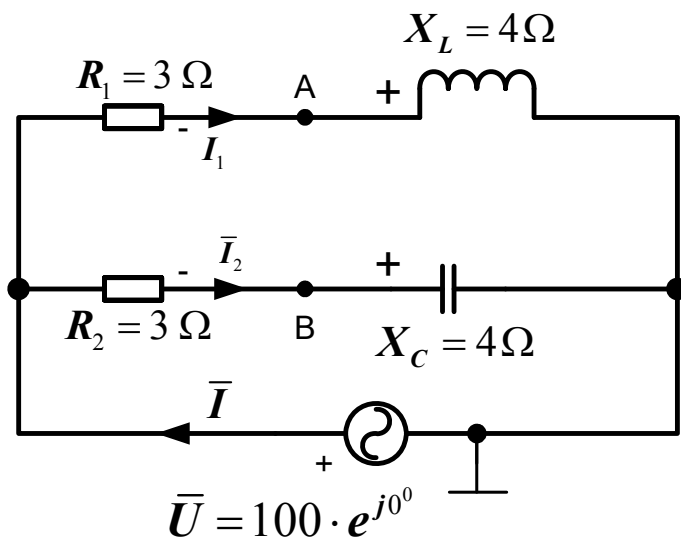
I =

3.4977 + 3.2487i

Ia =

4.7737

115.) Potrebno je izračunati napon \bar{U}_{AB} u dijagonali izmjeničnog mosta na slici, te nacrtati topografski dijagram za taj spoj.



115.a) Rješenje:

Napon u točkama AB iznosi:

$$\bar{U}_{AB} = -100 \cdot \frac{3}{3 + j4} - \left(-100 \cdot \frac{3}{3 - j4} \right) = -12 \cdot (3 - j4) + 12 \cdot (3 + j4)$$

$$\bar{U}_{AB} = j96 \text{ V}.$$

$$\text{Struja } \bar{I}_1 \text{ iznosi: } \bar{I}_1 = \frac{100}{3 + j4} = \frac{100 \cdot (3 - j4)}{25} = 12 - j16 \text{ A}$$

$$\text{Struja } \bar{I}_2 \text{ iznosi: } \bar{I}_2 = \frac{100}{3 - j4} = \frac{100 \cdot (3 + j4)}{25} = 12 + j16 \text{ A}$$

$$\text{Napon na } \mathbf{R}_1 \text{ iznosi: } \bar{U}_{R_1} = \bar{I}_1 \cdot \mathbf{R}_1 = 36 - j48 \text{ V}$$

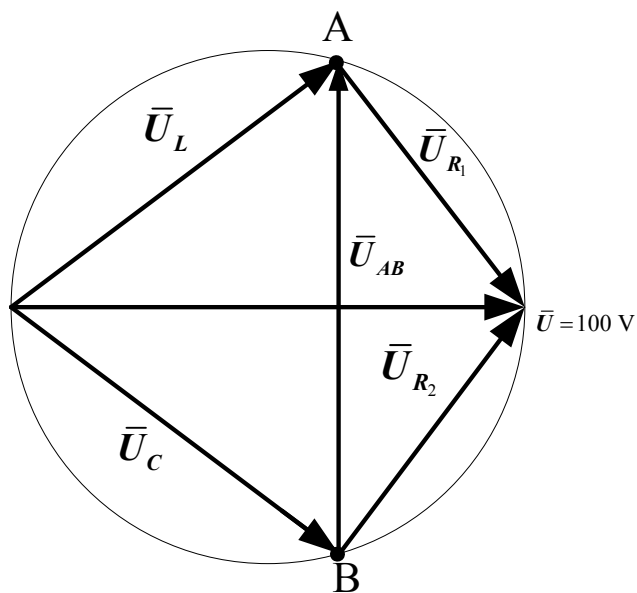
$$\text{Napon na } \mathbf{R}_2 \text{ iznosi: } \bar{U}_{R_2} = \bar{I}_2 \cdot \mathbf{R}_2 = (12 + j16) \cdot 3 = 36 + j48 \text{ V}$$

$$\text{Napon na } \mathbf{X}_L \text{ iznosi: } \bar{U}_L = \bar{I}_1 \cdot j\mathbf{X}_L = (12 - j16) \cdot j4 = 64 + j48 \text{ V}$$

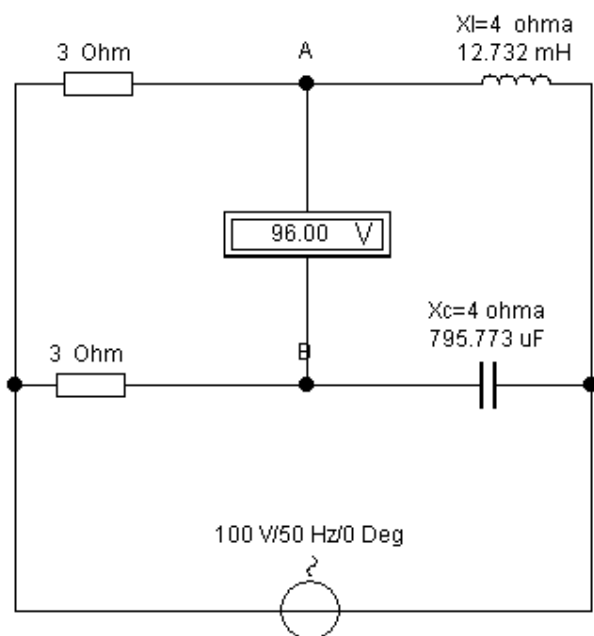
Napon na kondenzatoru iznosi:

$$\bar{U}_C = \bar{I}_2 \cdot (-j\mathbf{X}_C) = (12 + j16) \cdot (-j4) = 64 - j48 \text{ V}$$

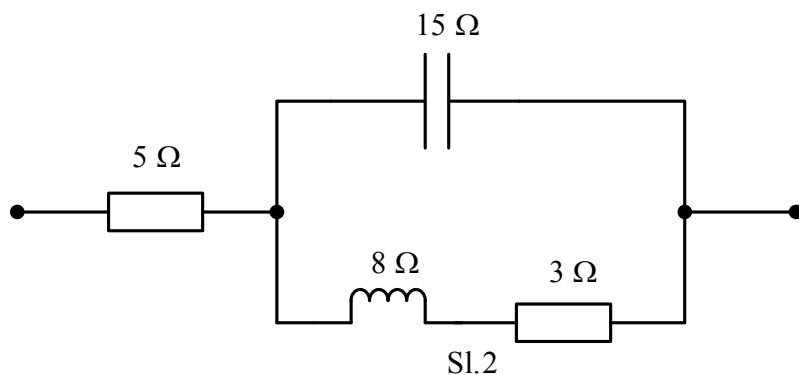
Topografski dijagram



Simulacija spoja u EWB 5.1



116.) Treba odrediti $\cos \varphi$ spoja na slici 2.



116.a) Rješenje: Impedancija spoja iznosi:

$$Z = 5 + \frac{-j15 \cdot (3 + j8)}{3 - j7} = 5 + \frac{120 - j45}{3 - j7} = 5 + \frac{(120 - j45) \cdot (3 + j7)}{58} =$$

$$5 + 11,638 + j12,155 = 16,638 + j12,155 \text{ } \Omega$$

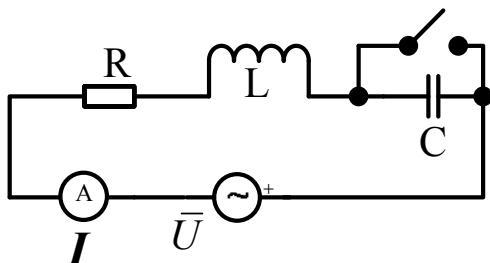
Apsolutni iznos impedancije iznosi: $Z = \sqrt{16,638^2 + 12,155^2} = 20,6 \text{ } \Omega$

$$\tan \varphi = \frac{I_m(Z)}{R_e(Z)} = \frac{12,155}{16,638} = 0,73;$$

$$\varphi = \arctan(0,73) = 36,13^\circ;$$

$$\cos \varphi \approx 0,8$$

117.) U spoju prema slici spojem teče ista struja $I = 5,55 \text{ A}$ pri zatvorenom i otvorenom prekidaču. Napon izvora je $U = 100 \text{ V}$, frekvencije $f = 50 \text{ Hz}$. Treba odrediti iznose R i X_L , ako je $C = 159 \text{ }\mu\text{F}$.



117.a) Rješenje:

U zadatku su poznati apsolutni iznosi struje i napona pa zato vrijedi:

$$\frac{U}{I} = Z_{otv.} = Z_{zat.} = \frac{100}{5,55} \approx 18,02 \text{ }\Omega$$

Nadalje vrijedi da je: $\sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

$$R^2 + X_L^2 = R^2 + X_L^2 - 2 \cdot X_L \cdot X_C + X_C^2 \text{ pa slijedi da je: } X_C = 2 \cdot X_L$$

$$\text{Budući da je: } X_C = \frac{10^6}{314 \cdot 159} \approx 20 \text{ }\Omega, \text{ slijedi da je } X_L \approx 10 \text{ }\Omega$$

$$\text{Otpor otpornika iznosi: } R = \sqrt{Z_{zat.}^2 - X_L^2} = \sqrt{18^2 - 10^2} \approx 15 \text{ }\Omega$$

Pri zatvorenom prekidaču struja zaostaje za naponom, a pri otvorenom prekidaču struja za isti kut prethodi naponu izvora.

$$\text{Pri zatvorenom prekidaču fazni kut je: } \varphi = \arctan \frac{X_L}{R} = 33,69^\circ$$

$$\text{Pri otvorenom prekidaču fazni kut iznosi: } \varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} = -33,69^\circ$$

118.) Dvopol kondenzatora $C = 250 \text{ }\mu\text{F}$ i paralelnog otpornika s $R = 10 \text{ }\Omega$ je priključen na strujni izvor $i = 10 \cdot \sin(400 \cdot t)$. Kolika struja teče kroz otpornik i koliki napon vlada na krajevima otpornika?

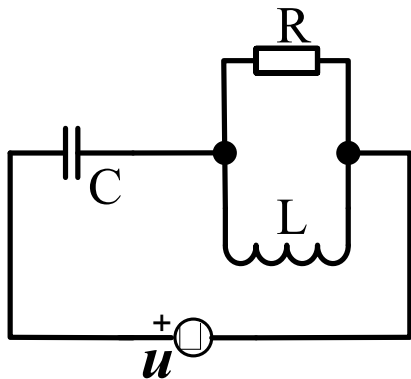
$$\text{118.a) Rješenje: Iznos kapacitivnog otpora je: } X_C = \frac{10^6}{250 \cdot 400} = 10 \text{ }\Omega;$$

$$\text{Struja kroz otpornik (strujni djelitelj) iznosi: } I_R = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-j10}{10 - j10} = \frac{5}{\sqrt{2}} - j \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Apsolutni iznos te struje iznosi: } I = \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2} = 5 \text{ A};$$

$$\text{Napon na krajevima otpornika iznosi: } U = I \cdot R = 5 \cdot 10 = 50 \text{ V}$$

119.) Potrebno je izvesti izraz za rezonantnu frekvenciju spoja na slici i nacrtati fazorski dijagram za slučaj kada ukupna struja prethodi naponu izvora.

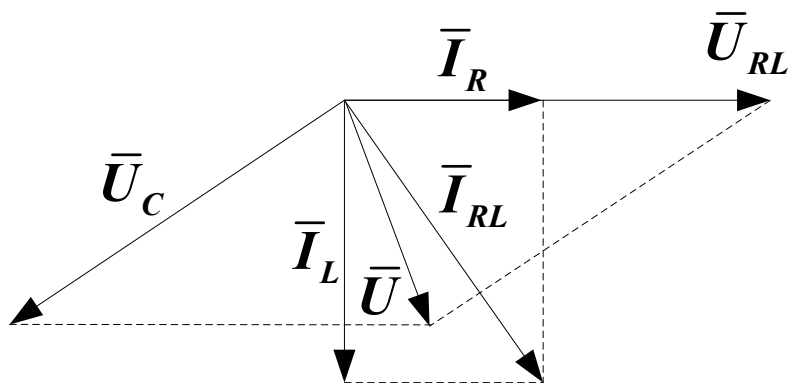


119.a) Rješenje:

Izraz za rezonantnu frekvenciju se dobije iz uvjeta :

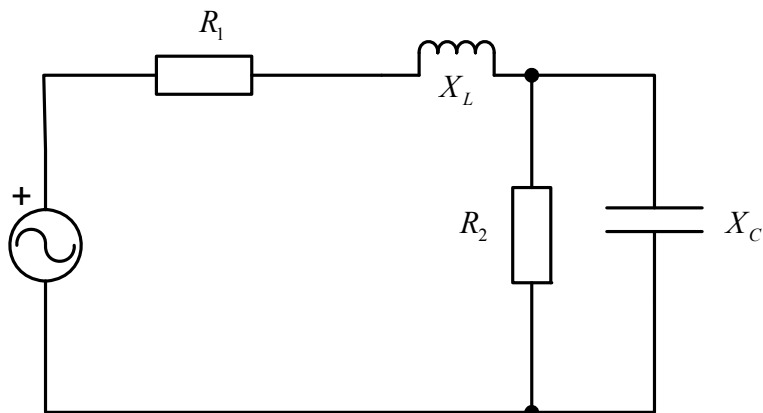
$$\text{Im}(Z) = 0; \quad Z = \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} - jX_C; \quad R^2 \cdot X_L - X_C \cdot R^2 - X_C \cdot X_L^2 = 0,$$

pa slijedi da je: $f_{\text{rez}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{R^2}{R^2 \cdot C \cdot L - L^2}}$



120.) Treba odrediti otpor R_2 u krugu na slici tako da napon i struja izvora budu u fazi.

$$X_C = 2 \cdot X_L = 100 \, \Omega$$



120.a) Rješenje:

Da bi napon izvora i struja izvora bili u fazi, imaginarni dio impedancije mora biti jednak nuli.

$$R_1 + jX_L + \frac{-R_2 \cdot jX_C}{R_2 - jX_C} = Z; \quad R_1 + jX_L + \frac{-R_2 \cdot jX_C \cdot (R_2 + jX_C)}{R_2^2 + X_C^2} = Z$$

$$\text{Im}(Z) = jX_L - \frac{R_2^2 \cdot jX_C}{R_2^2 + X_C^2} = 0 \quad \frac{jX_L \cdot R_2^2 + jX_L \cdot X_C^2 - R_2^2 \cdot jX_C}{R_2^2 + X_C^2} = 0$$

$$R_2^2 = \frac{X_L \cdot X_C^2}{X_C - X_L} = 4 \cdot X_L^2; \quad R_2 = 2 \cdot X_L = 100 \, \Omega$$

Korisna znanja iz trigonometrije

| | | | | | |
|---------------|-----------|--------------|--------------|--------------|------------|
| α | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
| radiani | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
| $\sin \alpha$ | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| $\cos \alpha$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 |
| $\tan \alpha$ | 0 | $\sqrt{3}/3$ | 1 | $\sqrt{3}$ | ∞ |

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Identicnosti za zbroj i razliku trigonometrijskih funkcija $\sin x$ i $\cos x$:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

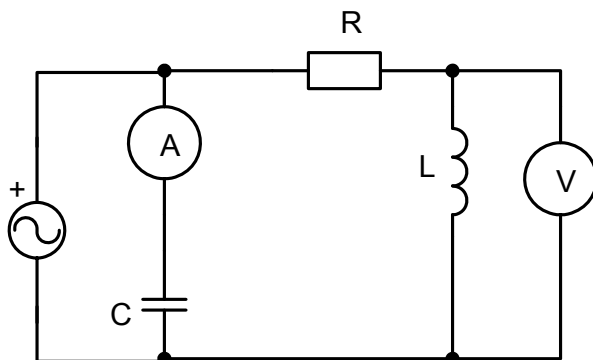
$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Identicnosti za produkt trigonometrijskih funkcija $\sin x$ i $\cos x$:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

121.) U spoju na slici 3 V-metar mjeri napon $U_v = 6 \text{ V}$, a A-metar struju $I_A = 1 \text{ A}$. Napon i struja izvora su u fazi. Potrebno je izračunati iznos induktivnog otpora X_L ako je napon izvora $U = 10 \text{ V}$.



Sl. 3

121.a) Rješenje:

Ako su napon i struja u fazi tada imaginarni dio impedancije ili admitancije mora biti jednak nuli.

$$Y_{RL} = \frac{R}{R^2 + X_L^2} - j \frac{X_L}{R^2 + X_L^2}; \quad B_C = \frac{I_C}{U} = 0,1 \text{ S}; \quad -j \frac{X_L}{R^2 + X_L^2} + j0,1 = 0;$$

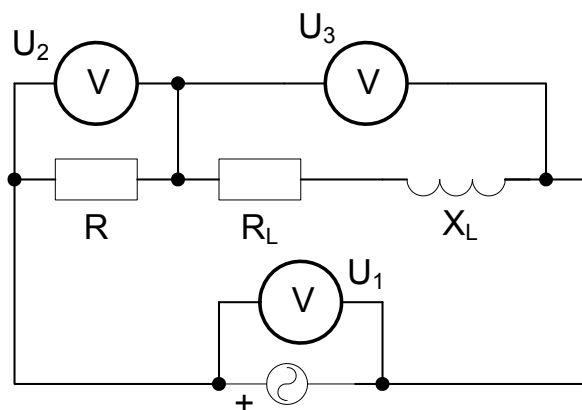
$$\frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = 0,1$$

Napon na induktivnom otporu iznosi 6 V pa je napon na otporniku R $U_R = 8 \text{ V}$. Struja kroz RL spoj je ista pa vrijedi da je:

$$\frac{U_R}{R} = \frac{U_L}{X_L}; \quad 4 \cdot X_L = 3 \cdot R \quad X_L = 0,1 \cdot R^2 + 0,1 \cdot X_L^2; \quad R = \frac{4 \cdot X_L}{3}$$

$$X_L = 0,1 \cdot \frac{16 \cdot X_L^2}{9} + 0,1 \cdot X_L^2; \quad X_L = \frac{9}{2,5} = 3,6 \text{ } \Omega$$

122.) Voltmetri na slici mjere napone: $U_1 = 36\text{ V}$; $U_2 = 20\text{ V}$; $U_3 = 22,4\text{ V}$. Ako je poznat otpor $R = 10\ \Omega$, i frekvencija $f = 60\text{ Hz}$, treba odrediti parametre zavojnice, R_L i X_L .



122.a) Rješenje:

Instrumenti mjere apsolutne vrijednosti pa je: $I = \frac{U_2}{R} = \frac{20}{10} = 2\text{ A}$.

Apsolutni iznos impedancije $Z_3 = \frac{U_3}{I} = \frac{22,4}{2} = 11,2\ \Omega$.

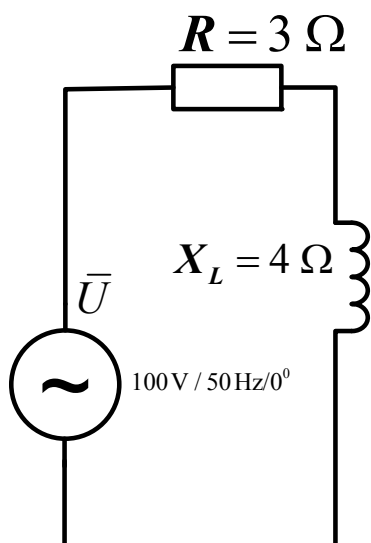
Apsolutni iznos ukupne impedancije spoja iznosi: $Z = \frac{U_1}{I} = \frac{36}{2} = 18\ \Omega$;

$$Z^2 = (R + R_L)^2 + X_L^2; \quad Z_3^2 = R_L^2 + X_L^2;$$

$$Z^2 - Z_3^2 = R^2 + 2 \cdot R \cdot R_L + R_L^2 + X_L^2 - R_L^2 - X_L^2 = R^2 + 2 \cdot R \cdot R_L$$

$$20 \cdot R_L = 98,56; \quad R_L = 4,928\ \Omega; \quad X_L = \sqrt{Z_3^2 - R_L^2} = 10\ \Omega; \quad L = \frac{10}{2\pi \cdot 60} = 26,6\text{ mH}.$$

123.) Potrebno je izračunati prividnu, djelatnu i jalovu snagu spoja na slici. Koliki je faktor snage spoja?



123.a) Rješenje:

Prividna snaga se zapiše kao: $\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I}^*$

Struju izračunamo kao: $\bar{I} = \frac{100}{3 + j4} = \frac{300 - j400}{25} = 12 - j16 \text{ A}$

Kompleksna snaga iznosi: $\bar{S} = 100 \cdot (12 + j16) = 1200 + j1600 \text{ VA}_r$ pa je:

$$P = 1200 \text{ W}; \quad Q = 1600 \text{ VA}_r$$

Ukupna snaga je: $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{1200^2 + 1600^2} = 2000 \text{ VA}$

Apsolutni iznos struje iznosi: $I = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ A}$ pa vrijedi i sljedeće:

$$S = U \cdot I = 100 \cdot 20 = 2000 \text{ VA}$$

$$P = I^2 \cdot R = 400 \cdot 3 = 1200 \text{ W}$$

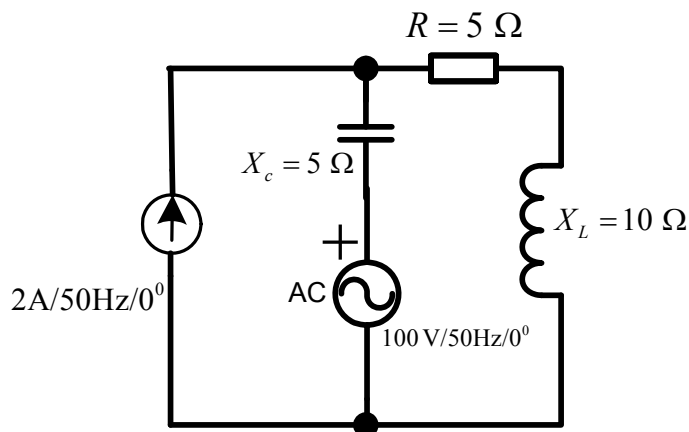
$$Q = I^2 \cdot X_L = 400 \cdot 4 = 1600 \text{ VA}_r$$

Faktor snage iznosi: $\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{3}{5} = 0,6$ pa je:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = 100 \cdot 20 \cdot 0,6 = 1200 \text{ W}$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = 100 \cdot 20 \cdot 0,8 = 1600 \text{ VA}_r$$

124.) Kolika je jalova snaga zavojnice u spoju na slici?



124.a) Rješenje:

Jalova snaga je imaginarni dio kompleksne snage: $Q = \text{Im}(I^2 \cdot Z)$.

Po metodi superpozicije, struja kroz zavojnicu se izračuna kao: Ako bi u krugu djelovao samo naponski izvor tekla bi struja:

$$\bar{I}'_L = \frac{100}{5 + j5} = \frac{20}{1 + j1} = 10 - j10 \text{ A}$$

Ako bi u spoju djelovao samo strujni izvor kroz zavojnicu bi tekla struja:

$$\bar{I}''_L = 2 \cdot \frac{-j5}{5 + j5} = \frac{-j10 \cdot (5 - j5)}{50} = -j1 - 1$$

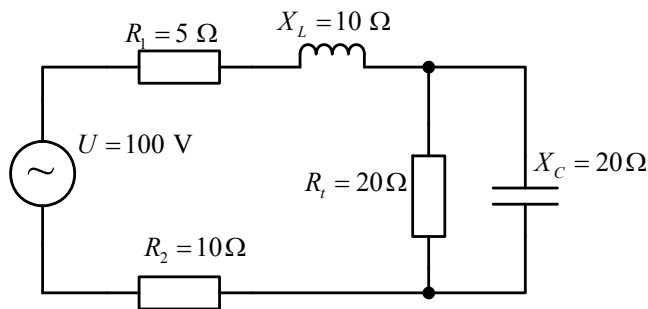
To znači da zavojnicom teče struja:

$$\bar{I}_L = (10 - j10) + (-1 - j1) = 9 - j11 \text{ A}$$

$$I_L^2 = 9^2 + 11^2 = 202 \text{ A}^2$$

$$Q = I^2 \cdot X_L = 202 \cdot 10 = 2020 \text{ VAr}$$

125.) Treba odrediti radnu, jalovu i prividnu snagu u spoju prema slici.



125.a) Rješenje: Impedancija spoja iznosi:

$$\text{Struja spoja iznosi: } \bar{I} = \frac{\bar{U}}{Z} = \frac{100}{25} = 4 \text{ A}$$

U spoju postoji samo djelatna snaga koja iznosi:

$$P = \operatorname{Re}(I^2 \cdot Z) = 16 \cdot 25 = 400 \text{ W}$$

Prividna snaga je jednaka djelatnoj, jalova snaga je jednaka nuli pa faktor snage iznosi 1.

$I = U/Z_u$ukupna struja spoja

$I_a = \operatorname{abs}(I)$apsolutni iznos struje

$S = U \cdot \operatorname{conj}(I)$kompleksna snaga spoja

$P_u = \operatorname{real}(S)$ukupna djelatna snaga spoja

$PR1 = I_a^2 \cdot R1$djelatna snaga otpornika R1

$PR2 = I_a^2 \cdot R2$djelatna snaga otpornika R2

$P_t = P - PR1 - PR2$djelatna snaga Rt

>> Zu =

25

I =

4

Ia =

4

S =

400

Pu =

400

PR1 =

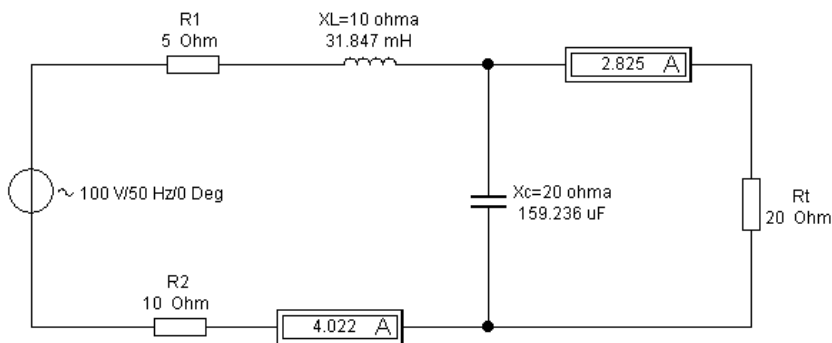
80

PR2 =

160

Pt =

160



Vidimo da je

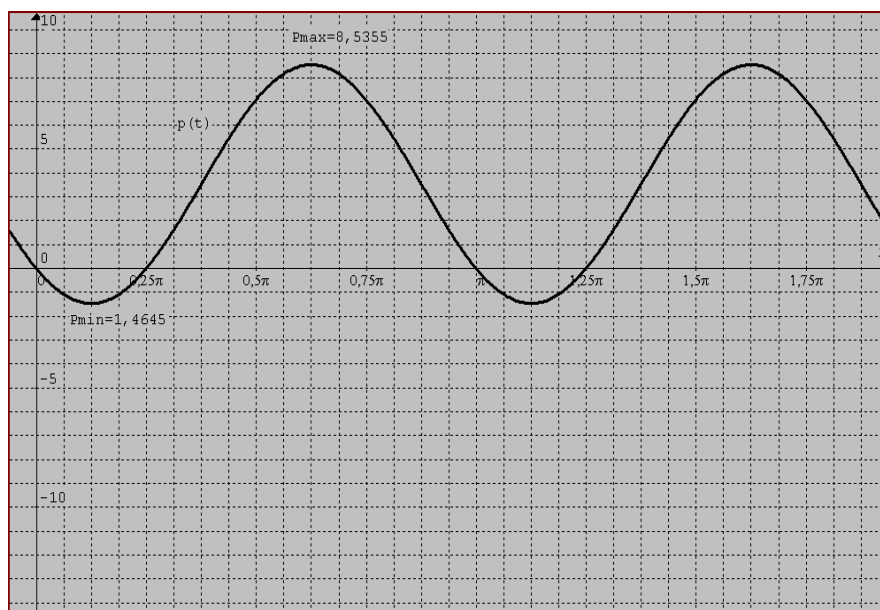
$$P_{R1} = 4,022^2 \cdot 5 \approx 80 \text{ W}; \quad P_{R2} = 4,022^2 \cdot 10 \approx 160 \text{ W}; \quad P_i = 2,825^2 \cdot 20 \approx 160 \text{ W}$$

126.) Treba odrediti snagu izmjenične struje:

- a) pomoći ekstrema funkcije $p(t)$
- b) pomoću efektivnih vrijednosti koje pokazuju instrumenti
- c) pomoću fazora napona i struje

ako se napon mijenja prema : $u = 5 \cdot \sin \omega t$, a struja prema $i = 2 \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$

126.a) Rješenje:



Prividna snaga je jednaka: $S = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} = \frac{8,5355 + 1,4645}{2} = 5 \text{ VA}$

Djelatna snaga je jednaka: $P = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2} = 3,5355 \text{ W}$

Jalova snaga je jednaka: $Q = \sqrt{P_{\max} \cdot P_{\min}} = \sqrt{8,5355 \cdot 1,4645} = 3,535 \text{ VA}_r$

126.b) Rješenje:

Efektivne vrijednosti napona i struje su:

$$U = \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ V}; \quad I = \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ A}$$

Prividna snaga se pomoću apsolutnih vrijednosti napona i struje izračunava prema:

$$S = U \cdot I = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 5 \text{ VA}$$

Djelatna snaga je jednaka:

$$P = S \cdot \cos \varphi = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3,5355 \text{ W}$$

Jalova snaga je jednaka:

$$Q = S \cdot \sin \varphi = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3,5355 \text{ VA}_r$$

126.c) Rješenje:

Fazori napona i struje su:

$$\bar{U} = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot e^{j0^\circ}; \quad \bar{I} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j45^\circ}$$

pa je kompleksna snaga:

$$S = \bar{U} \cdot \bar{I}^* = 3,5355 + j3,5355 \text{ VA}$$

što znači da je djelatna snaga po iznosu jednaka jalovoj:

$$P = \text{Re}(\bar{S}) = 3,5355 \text{ W}; \quad Q = \text{Im}(\bar{S}) = 3,5355 \text{ VA}_r$$

127.) Potrebno je izračunati prividnu, jalovu i djelatnu snagu te faktor snage jednofaznog trošila koje je priključeno na izvor napona $u = 220 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t)$ ako se struja trošila mijenja prema $i = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 36,87^\circ)$. Nacrtati i trokut snaga.

127.a) Rješenje:

Iz zapisa za trenutni napon i struju se vidi da je: $U_{ef} = 220 \text{ V}$; $I_{ef} = 10 \text{ A}$.

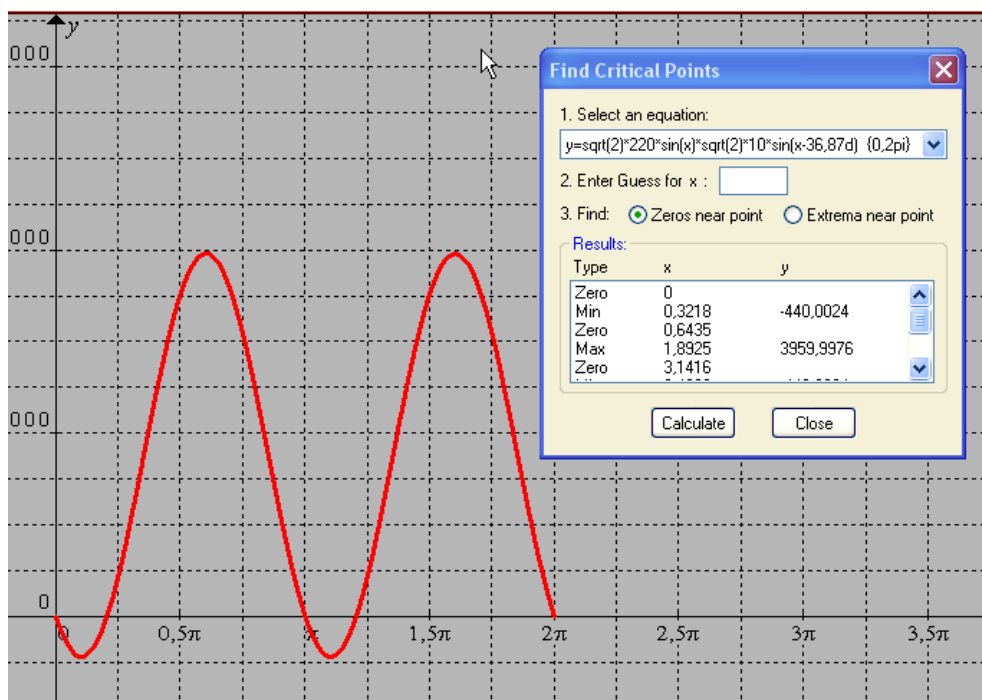
Struja je induktivnog karaktera i zaostaje za naponom za kut $\varphi = 36,87^\circ$, što znači da je: $\cos \varphi = 0,8$; $\sin \varphi = 0,6$.

Prividna snaga iznosi $S = U_{ef} \cdot I_{ef} = 220 \cdot 10 = 2200 \text{ VA}$.

Djelatna snaga je $P = U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos \varphi = 220 \cdot 10 \cdot 0,8 = 1760 \text{ W}$.

Jalova snaga iznosi $Q = U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \sin \varphi = 2200 \cdot 0,6 = 1320 \text{ VAr}$.

127.b) Rješenje: Drugi način izračunavanja snaga :



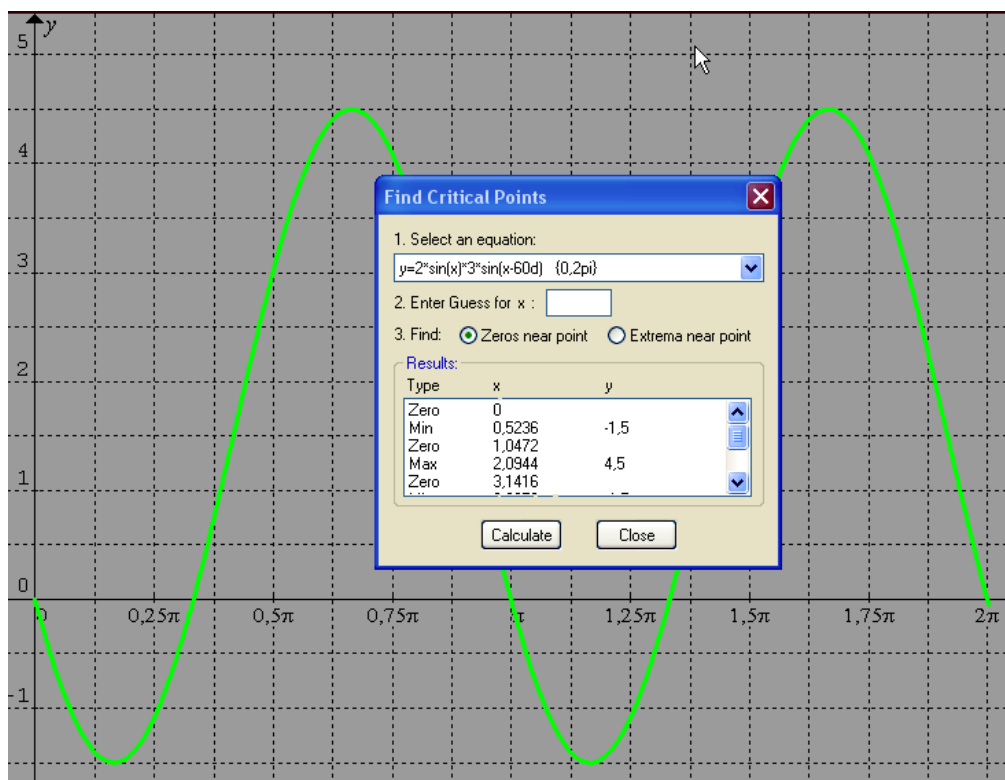
$|A_{\min}| = 440,0024$; $A_{\max} = 3959,9976$, pa je

$$S = \frac{A_{\max} + |A_{\min}|}{2} = \frac{3959,9976 + 440,0024}{2} = 2200 \text{ VA}$$

$$P = \frac{A_{\max} - |A_{\min}|}{2} = \frac{3959,9976 - 440,0024}{2} = 1759,9976 \text{ W}$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{2200^2 - 1760^2} = 1320 \text{ VAr}$$

128.) Potrebno je izračunati faktor snage pomoću grafa $p(t)$ prikazanog na slici



128.a) Rješenje:

Iz dijagrama je vidljivo da je $A_{\max} = 4,5$; $|A_{\min}| = 1,5$, pa je

$$S = \frac{4,5 + 1,5}{2} = 3 \text{ VA}; \quad P = \frac{4,5 - 1,5}{2} = 1,5 \text{ W}; \quad Q = \sqrt{A_{\max} \cdot |A_{\min}|} = \sqrt{4,5 \cdot 1,5} = 2,598 \text{ VAR}$$

128.) Rješenje u MATLAB-u

```
syms x %definiranje simboličke varijable
Umax=2;Imax=3;fis=60; %zadano
fi=pi*fis/180 %fazni kut izrazen u radianima
u=Umax*sin(x) %trenutni napon
i=Imax*sin(x-fi) %trenutna struja
p=u*i %trenutna snaga
P=eval(1/(2*pi)*int(p,0,2*pi)) %definijski izraz za djelatnu snagu
```

```
>> fi =
    1.0472
```

```
u =
    2*sin(x)
```

```
i =
    -3*cos(x+1/6*pi)
```

```
p =
```

```
    -6*sin(x)*cos(x+1/6*pi)
```

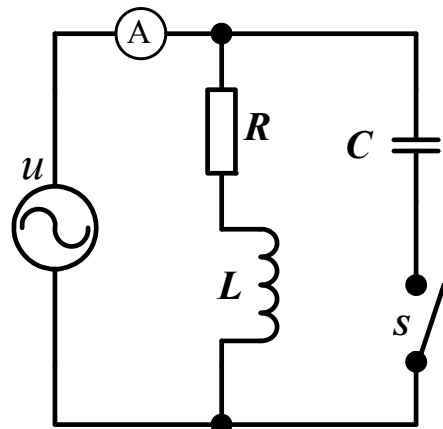
```
P =
```

```
    1.5000
```

```
>>
```

129.) Potrebno je izračunati iznos potrebnog kapaciteta u μF tako da faktor snage u spoju prema slici bude 0,95, ako je: $U = 220\text{V}$; $R = 30\Omega$; $L = 100\text{mH}$.

- Kolika je prividna, djelatna i jalova snaga spoja pri isključenom kondenzatoru ?
- Koliki mora biti kapacitet kondenzatora za potpunu kompenzaciju ?
- Koliki mora biti kapacitet za djelomičnu kompenzaciju ?
- Za koliko ampera se smanji pokazivanje A-metra ako je izvedena potpuna kompenzacija?



129.a) Rješenje: Kondenzator nije priključen

Induktivni otpor zavojnice iznosi: $X_L = \omega \cdot L = 314 \cdot 0,1 = 31,4 \Omega$

Impedancija spoja iznosi: $Z = R + jX_L = 30 + j31,4$

pa je struja spoja: $\bar{I} = \frac{\bar{U}}{Z} = \frac{220}{30 + j31,4} = 3,5 - j3,66 \text{ A}$

Snaga spoja je: $\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I}^* = 220 \cdot (3,5 + j3,66) = 770 + j805,2 \text{ VA}$

Što znači da je: $P = 770 \text{ W}$; $Q = 805,2 \text{ VA}_r$; $S = 1114,11 \text{ VA}$

129.b) Rješenje: Za potpunu kompenzaciju treba poništiti cjelokupnu jalovu snagu zavojnice pa jalova snaga kondenzatora mora iznositi:

$$Q_c = 805,2 \text{ VA}_r.$$

Zato kapacitet kondenzatora mora iznositi:

$$C = \frac{Q_c}{\omega \cdot U^2} = \frac{805,2}{314 \cdot 220^2} = 53 \mu\text{F}$$

129.c) Rješenje: Za djelomičnu kompenzaciju (dozvoljenih $\cos \varphi = 0,95$), jalova snaga iznosi:

$$Q' = P \cdot \tan \varphi'; \quad \tan \varphi' = 0,3286, \quad Q' = 770 \cdot 0,3286 = 253 \text{ VA}_r,$$

a jalova snaga te kapacitet kondenzatora moraju biti:

$$Q_c = 805,2 - 253 = 552,2 \text{ VA}_r,$$

$$C = \frac{Q_c}{\omega \cdot U^2} = \frac{552,2}{314 \cdot 220^2} = 36,33 \mu\text{F}$$

129.d) Rješenje:

Bez priključenog kondenzatora spojem teče struja: $I = \frac{S}{U} = \frac{1114,11}{220} = 5,06 \text{ A}$

Kod potpune kompenzacije spojem teče struja: $I = \frac{P}{U} = \frac{770}{220} = 3,5 \text{ A}$

A-metar će pokazivati manju struju: $\Delta I = 5,06 - 3,5 = 1,56 \text{ A}$

**130.) Impedancija $Z = 6 + j8\Omega$ je priključena na napon $\bar{U} = 200\angle 30^\circ$
Potrebno je izračunati kompleksnu snagu i nacrtati trokut snaga za taj slučaj.**

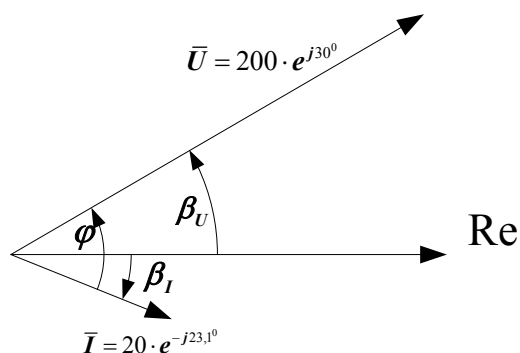
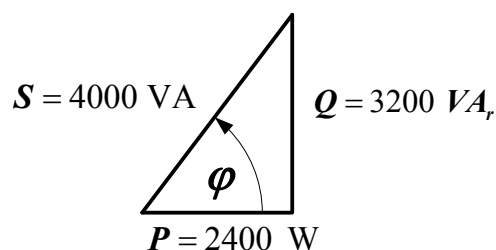
130.a) Rješenje:

Spojem će teći struja: $\bar{I} = \frac{\bar{U}}{Z} = \frac{200 \cdot e^{j30^\circ}}{6 + j8} = \frac{200 \cdot e^{j30^\circ}}{10 \cdot e^{j53,13^\circ}} = 20 \cdot e^{-j23,13^\circ}$

Kompleksna snaga je definirana kao:

$$\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I}^* = 200 \cdot e^{j30^\circ} \cdot 20 \cdot e^{j23,13^\circ} = 4000 \cdot e^{j53,13^\circ}$$

$$\bar{S} = 4000 \cdot (\cos 53,13^\circ + j \sin 53,13^\circ) = 4000 \cdot (0,6 + j0,8) = 2400 + j3200 \text{ VA}$$

Fazorski dijagram napona i struje**Trokut snaga**

131.) Na jednofaznu izmjeničnu mrežu napona $U = 220 \text{ V}$ priključena su tri trošila nazivnih podataka:

- a) Jednofazni asinkroni motor s $P_1 = 1,1 \text{ kW}; \cos \varphi_1 = 0,8$
- b) Jednofazni asinkroni motor s $P_2 = 2,2 \text{ kW}; \cos \varphi_2 = 0,6$
- c) Električni bojler snage $P_3 = 1000 \text{ W}$

Kolika je jakost struje u zajedničkom priključnom vodu i koliki je zajednički faktor snage postrojenja?

Potrebno je izračunati potrebni kapacitet kondenzatora za kompenzaciju da bi novi faktor snage bio $\cos \varphi_n = 0,95$

131.a) Rješenje:

Ukupna djelatna snaga postrojenja iznosi:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 1100 + 2200 + 1000 = 4300 \text{ W}$$

Ukupna jalova snaga postrojenja iznosi:

$$Q = P_1 \cdot \tan \varphi_1 + P_2 \cdot \tan \varphi_2 = 1100 \cdot \frac{0,6}{0,8} + 2200 \cdot \frac{0,8}{0,6} = 825 + 2933,33 = 3758,33 \text{ VA}_r$$

Prividna snaga postrojenja iznosi:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{4300^2 + 3758,33^2} = 5710,95 \text{ VA}$$

$$\text{Jakost struje u zajedničkom priključnom vodu iznosi: } I = \frac{S}{U} = \frac{5710,95}{220} = 25,95 \text{ A}$$

$$\text{Faktor snage postrojenja iznosi: } \cos \varphi_p = \frac{P}{S} = \frac{4300}{5710,95} = 0,753$$

$$C = \frac{P}{\omega \cdot U^2} \cdot (\tan \varphi_p - \tan \varphi_n) = \frac{4300}{314 \cdot 220^2} \cdot (0,8738 - 0,3286)$$

$$C = \frac{4300 \cdot 0,5452}{314 \cdot 220^2} = 154,258 \text{ } \mu\text{F}$$

$$\text{Pri } \cos \varphi = 0,95 \text{ prividna snaga iznosi: } S_{0,95} = \frac{P}{0,95} = \frac{4300}{0,95} = 4526,31 \text{ VA}$$

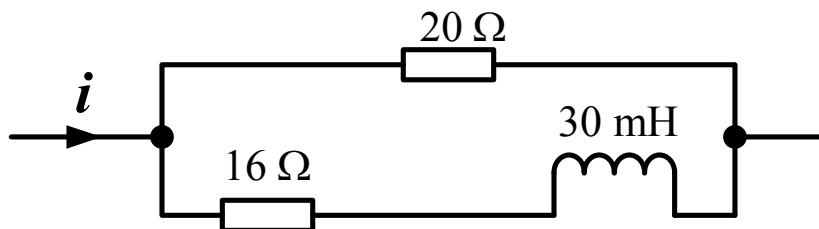
$$\text{Sada je jalova snaga: } Q_{0,95} = \sqrt{4526,31^2 - 4300^2} = 1413,32 \text{ VA}_r$$

$$\text{Jalova snaga kondenzatora iznosi: } Q_c = 3758,33 - 1413,33 = 2345 \text{ VA}_r$$

$$\text{Zato je: } C = \frac{Q_c}{314 \cdot 220^2} = 154,3 \text{ } \mu\text{F}$$

132.) a) Potrebno je izračunati prividnu, djelatnu i jalovu snagu spoja prema slici, koji je napajan strujom: $i = 30 \sin(400t)$.

b.) Kolike su pojedinačne djelatne snage otpornika ?



132.a) Rješenje:

Induktivni otpor zavojnice iznosi: $X_L = \omega L = 400 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 12 \, \Omega$

Admitancija spoja iznosi:

$$Y = \frac{1}{16 + j12} + \frac{1}{20} = 0,04 - j0,03 + 0,05 = 0,09 - j0,03$$

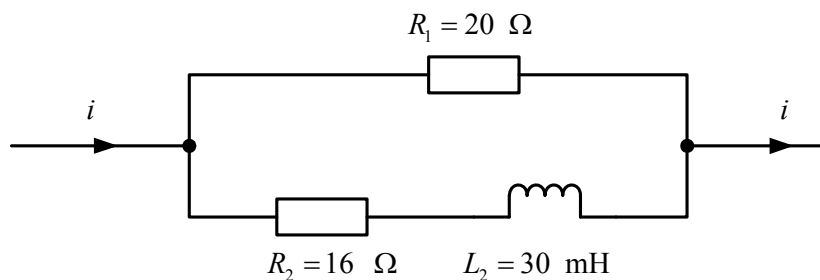
Amplituda struje iznosi 30 Ampera, što znači da je efektivna vrijednost: $\frac{30}{\sqrt{2}}$

Kompleksna snaga je jednaka: $\bar{S} = I^2 \cdot Z = \frac{I^2}{Y} = \frac{450}{0,09 - j0,03} = 4500 + j1500$

To znači da je: $P = 4500 \, \text{W}$; $Q = 1500 \, \text{VA}_r$

132.b) Rješenje: ($P_{20} = 2500 \, \text{W}$; $P_{16} = 2000 \, \text{W}$)

Zadatak se može riješiti i na ovaj način:



Induktivni otpor spoja iznosi:

$$X_L = \omega \cdot L = 400 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 12 \text{ } \Omega$$

Impedancija spoja iznosi:

$$Z = \frac{R_1 \cdot (R_2 + jX_L)}{R_1 + R_2 + jX_L} = \frac{20 \cdot (16 + j12)}{36 + j12} = \frac{20 \cdot (16 + j12) \cdot (36 - j12)}{1440}$$

$$Z = 10 + j \frac{240}{72} \text{ } \Omega$$

Ukupna snaga spoja iznosi:

$$\bar{S} = I^2 \cdot Z = \left(\frac{30}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \left(10 + j \frac{240}{72} \right) = 4500 + j1500 \text{ VA}$$

$$P = 4500 \text{ W}; \quad Q = 1500 \text{ VAr}.$$

Između čvorova postoji napon: $\bar{U} = \bar{I} \cdot Z = \frac{300}{\sqrt{2}} + j \frac{100}{\sqrt{2}}$

Snaga otpornika R_1 iznosi:

$$P_{R_1} = \frac{U^2}{R_1} = \frac{1}{20} \cdot \left[\left(\frac{300}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{100}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = 2500 \text{ W}$$

Snaga otpornika R_2 iznosi: $P_{R_2} = P - P_{R_1} = 2000 \text{ W}$

Apsolutni iznos napona između čvorova iznosi:

$$U = \sqrt{\left(\frac{300}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{100}{\sqrt{2}} \right)^2} = \sqrt{50000} \text{ V}$$

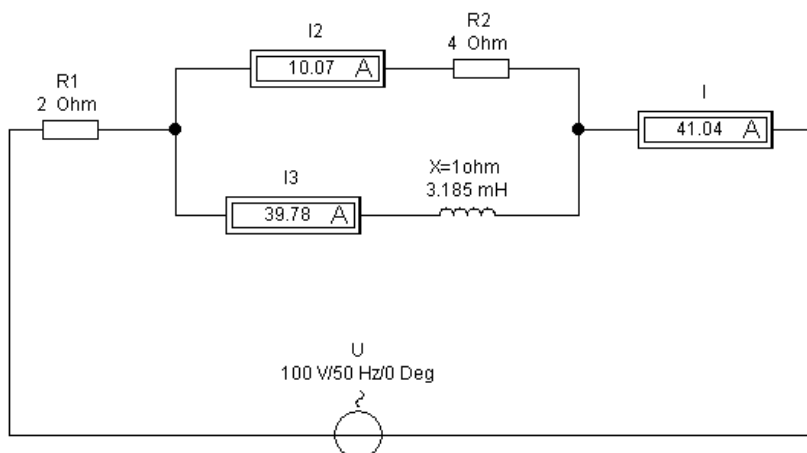
Apsolutna impedancija grane u kojoj se nalazi R_2 iznosi:

$$Z_{LR_2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ } \Omega$$

Apsolutni iznos struje te grane je: $I = \frac{\sqrt{50000}}{20} \text{ A}.$

Snaga otpornika R_2 iznosi: $P_{R_2} = I^2 \cdot R_2 = \frac{50000}{400} \cdot 16 = 500 \cdot 4 = 2000 \text{ W}.$

133.) Potrebno je izračunati snage pojedinih elemenata spoja te ukupnu kompleksnu snagu.



133.a) Rješenje: (MATLAB)

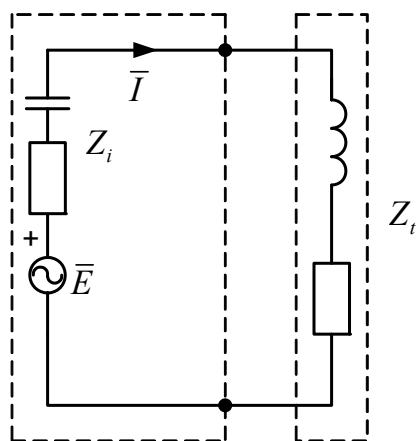
```

R1=2;R2=4;X=1;U=100;
Z=R1+R2*i*X/(R2+i*X)
I=U/Z
S=U*conj(I)
I2=I*i*X/(R2+i*X)
I3=I*R2/(R2+i*X)
I2a=abs(I2)
I3a=abs(I3)
P2=I2a^2*R2
Q=I3a^2*X
Ia=abs(I)
P1=Ia^2*R1
Pu=P1+P2
-----
>> Z = 2.2353 + 0.9412i
I = 38.0000 -16.0000i
S = 3.8000e+003 +1.6000e+003i
I2 = 6.0000 + 8.0000i
I3 = 32.0000 -24.0000i
I2a = 10
I3a = 40
P2 = 400
Q = 1600
Ia = 41.2311
P1 =3.4000e+003
Pu = 3.8000e+003
-----

```

PRILAGOĐENJE NA MAKSIMALNU SNAGU

134.) Na izmjenični izvor unutarnje impedancije $Z_i = 3 - j4$; $E = 12$ (V) treba priključiti trošilo takove impedancije da se na njemu oslobodi maksimalna korisna snaga.

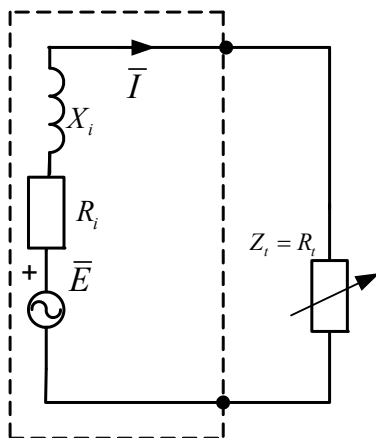


Sl. 36

134.a) Rješenje: $Z_t = Z_i^*$; $Z_t = 3 + j4$;

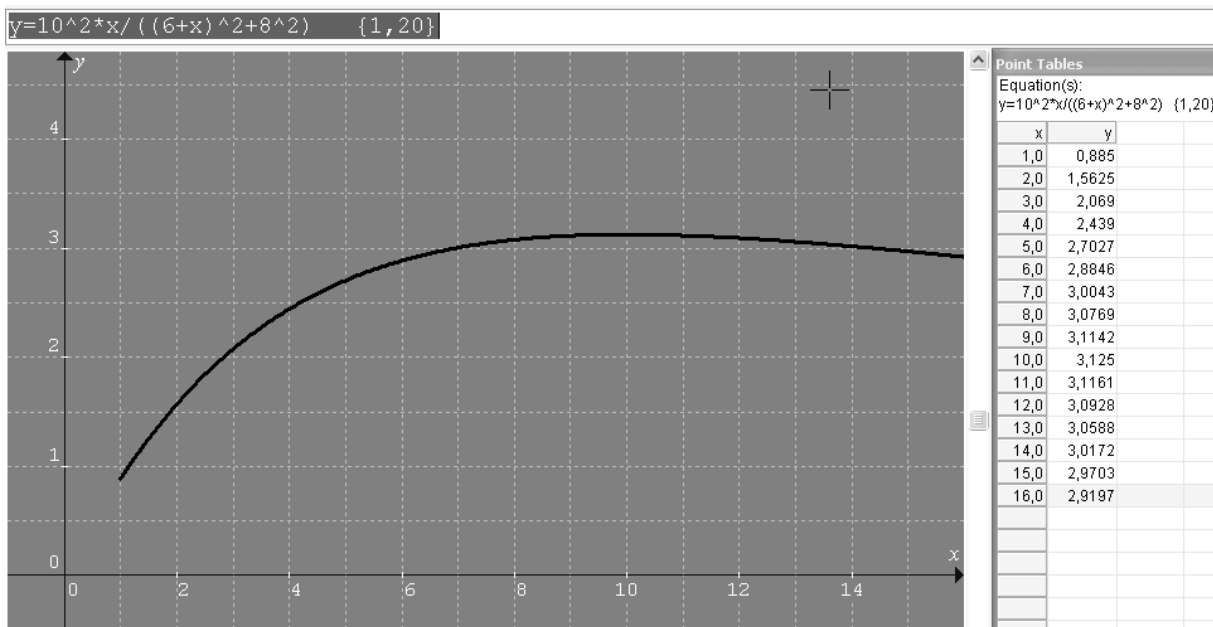
$$\text{Maksimalna snaga iznosi: } P_{\max} = \frac{E^2}{4 \cdot R_t} = \frac{144}{4 \cdot 3} = 12 \text{ (W)}$$

135.) Koji uvjet mora biti zadovoljen da se na trošilu $Z_l = R_l$ pojavi maksimalna snaga ako je $Z_i = R_i + jX_i$. Prikazati grafički promjenu snage na R_l ako je $E = 10 \text{ V}$; $Z_i = 6 + j8 \Omega$; $R_l = (1 \div 20) \Omega$.



135.a) Rješenje: $I^2 = \frac{E^2}{(R_i + R_l)^2 + X_i^2}$ pa je $P_{Rl} = \frac{E^2 \cdot R_l}{(R_i + R_l)^2 + X_i^2}$

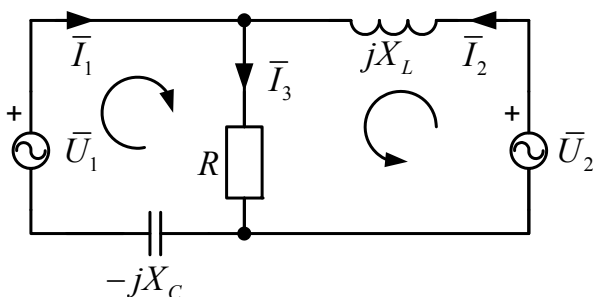
Iz $\frac{dP_{R_l}}{dR_l} = 0$ slijedi da za pojavu maksimalne snage na R_l mora biti $R_l = |Z_i|$



RJEŠAVANJE MREŽA IZMJENIČNE STRUJE-METODE

136.) Neka je na slici poznato: $\bar{U}_1 = 10 \cdot e^{j0}$; $\bar{U}_2 = 20 \cdot e^{j0}$; $R = 5 \Omega$; $f = 50 \text{ Hz}$

$L = 12,74 \text{ mH}$; $C = 1592 \mu\text{F}$ i treba izračunati struje u granama, metodom Kirchhoffovih pravila.



136.a) Rješenje:

Najprije treba izračunati iznose induktivnog i kapacitivnog otpora:

$$X_L = \omega \cdot L = 314 \cdot 12,74 = 4 \Omega; \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{314 \cdot 1592} = 2 \Omega$$

$$\text{Lijeva petlja: } -j2 \cdot \bar{I}_1 + 5 \cdot \bar{I}_3 = 10$$

$$\text{Desna petlja: } j4 \cdot \bar{I}_2 + 5 \cdot \bar{I}_3 = 20$$

$$\text{Čvorište: } \bar{I}_1 + \bar{I}_2 - \bar{I}_3 = 0$$

Rješenje sustava triju linearnih jednažbi je:

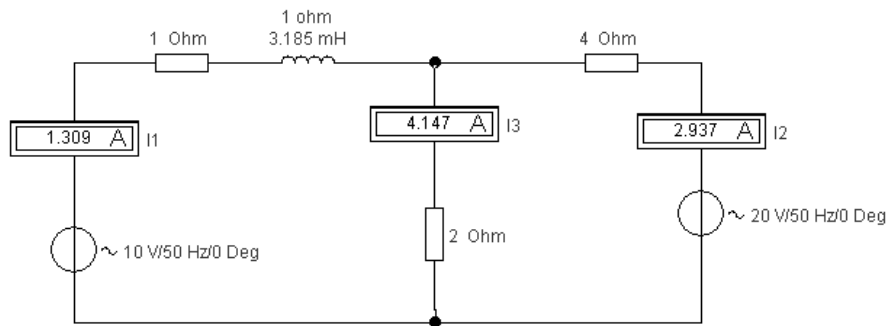
$$\bar{I}_1 = j5 \text{ (A)}; \quad \bar{I}_2 = -j5 \text{ (A)}; \quad \bar{I}_3 = 0 \text{ (A)}$$

136.b) Rješenje u MATLAB-u

```
U1=10;U2=20;R=5;f=50;XL=4;Xc=2;
a=solve('U1-I3*R+i*I1*Xc=0','U2-I2*i*XL-I3*R=0','I1+I2=I3','I1','I2','I3')
I1=eval(a.I1)
I2=eval(a.I2)
I3=eval(a.I3)
```

```
-----
>> a =
    I1: [1x1 sym]
    I2: [1x1 sym]
    I3: [1x1 sym]
I1 =
    0 + 5.0000i
I2 =
    0 - 5.0000i
I3 =
    0
```

137.) Potrebno je izračunati struje u granama mreže.

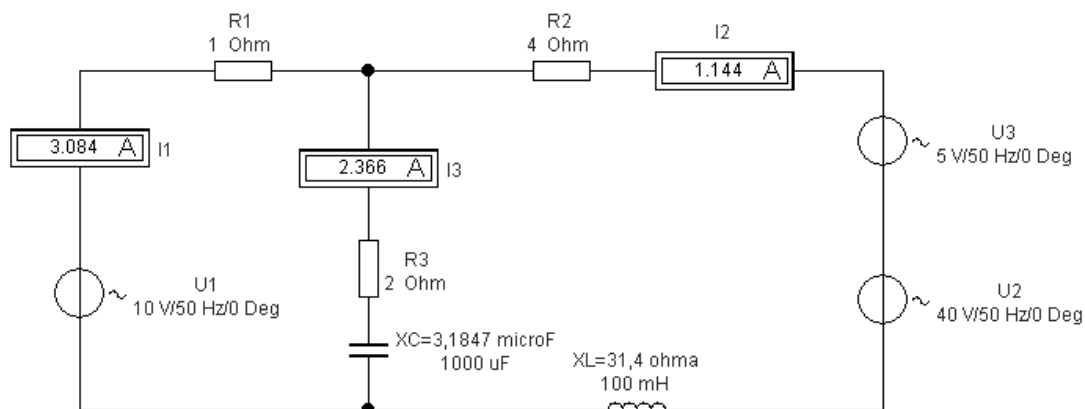


137.a) Rješenje u MATLAB-u

```
U1=10;U2=20;R1=1;R2=4;R3=2;X1=1;
Z=[R1+i*X1 0 R3
    0 R2 R3
    1 1 -1]
U=[U1
   U2
   0]
I=inv(Z)*U
I1=abs(I(1))
I2=abs(I(2))
I3=abs(I(3))
```

```
>> Z =
    1.0000 + 1.0000i    0    2.0000
           0    4.0000    2.0000
    1.0000    1.0000   -1.0000
U =
    10
    20
     0
I =
    1.2069 - 0.5172i
    2.9310 + 0.1724i
    4.1379 - 0.3448i
I1 =
    1.3131
I2 =
    2.9361
I3 =
    4.1523
```

138.) Potrebno je izračunati struje u granama mreže prema slici:



138.a) Rješenje: Zapisati jednadžbe petlji i jednadžbu za gornji čvor:

$$1.) R_1 \cdot \bar{I}_1 + (R_3 - jX_c) \cdot \bar{I}_3 = \bar{U}_1$$

$$2.) (R_2 + jX_L) \cdot \bar{I}_2 + (R_3 - jX_c) \cdot \bar{I}_3 = \bar{U}_2 + \bar{U}_3$$

$$3.) \bar{I}_1 + \bar{I}_2 - \bar{I}_3 = 0$$

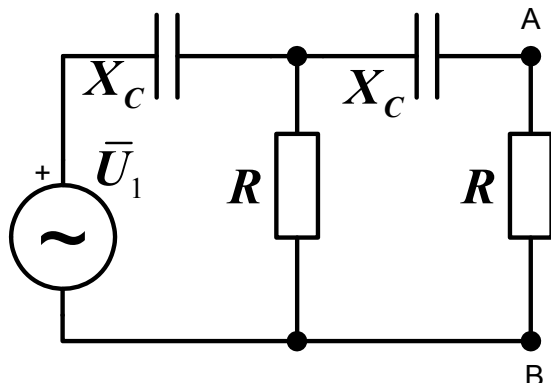
138.b) Rješenje u MATLAB-u

Kompleksne matrice za impedanciju i napone te struje grana jednostavno je zapisati kratkim programom u MATLAB-u.

```
Z=[R1 0 R3-i*XC;0 R2+i*XL R3-i*XC;1 1 -1;]
U=[U1;U2+U3;0;]
I=inv(Z)*U
I1a=abs(I(1))
I2a=abs(I(2))
I3a=abs(I(3))

-----
>> Z =
    1.0000         0    2.0000 - 3.1850i
         0    4.0000 +31.4160i    2.0000 - 3.1850i
    1.0000    1.0000    -1.0000
U =
    10
    45
     0
I =
    1.5626 + 2.6586i
    0.2291 - 1.1347i
    1.7917 + 1.5240i
I1a =
    3.0839
I2a =
    1.1575
I3a =
    2.3522
>>
```

139.) Potrebno je izračunati napon \bar{U}_{AB} u spoju na slici, ako je $\bar{U}_1 = 100 \cdot e^{j0}$, i $X_C = R$. U kakovom su faznom odnosu napon izvora i napon u točkama AB?



139.a) Rješenje:

Zadatak se može riješiti pomoću Theveninovog teorema.

Theveninov napon u točkama AB iznosi:

$$\bar{U}_T = 100 \cdot \frac{R}{R - jR} = 100 \cdot \frac{1}{1 - j1} = 50 + j50 \text{ V}$$

$$\bar{Z}_T = \frac{-jR \cdot R}{R - jR} - jR = (0,5 - j1,5) \cdot R \text{ } \Omega$$

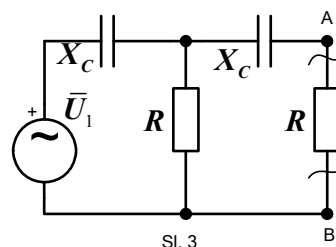
Napon u točkama AB iznosi:

$$\bar{U}_{AB} = \bar{U}_T \cdot \frac{R}{\bar{Z}_T + R} = (50 + j50) \cdot \frac{R}{0,5R - j1,5R + R}$$

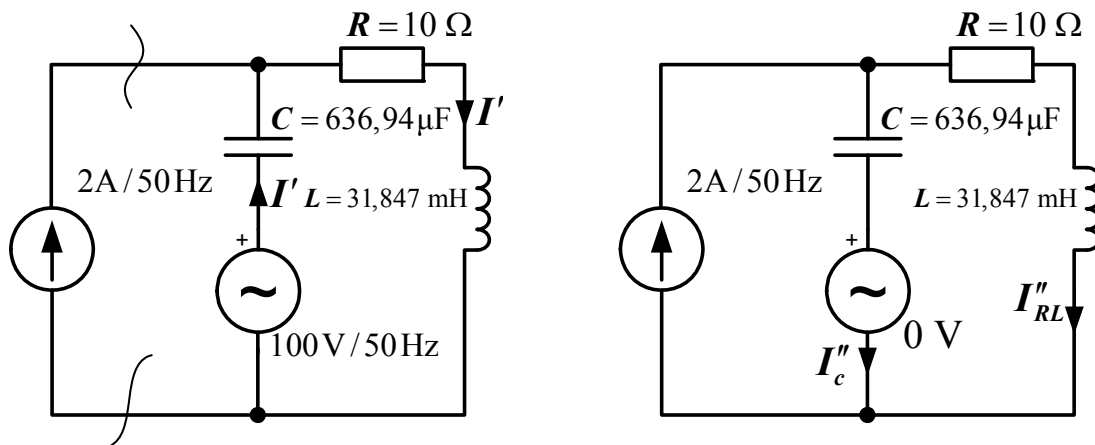
$$\bar{U}_{AB} = (50 + j50) \cdot \frac{1}{1,5 - j1,5} = \frac{j150}{4,5} = j33,3 = 33,3 \cdot e^{j90^\circ} \text{ ili:}$$

$$\bar{U}_{AB} = \frac{50 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ}}{1,5 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j(-45^\circ)}} = 33,33 \cdot e^{j90^\circ}$$

Napon \bar{U}_{AB} prethodi naponu \bar{U} za $\frac{\pi}{2}$ radijana.



140.) Potrebno je izračunati struje u granama mreže metodom superpozicije.



140.a) Rješenje: Najprije treba izračunati jalove otpore;

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1 \cdot 10^6}{314 \cdot 636,94} = 5 \Omega; \quad X_L = \omega L = 314 \cdot 31,847 \cdot 10^{-3} = 10 \Omega$$

Ako bi djelovao samo naponski izvor (strujni izvor je pritom odspojen) tekla bi struja:

$$\bar{I}' = \frac{100}{10 + j5} = 8 - j4 \text{ A u naznačenom smjeru.}$$

Ako bi u spoju djelovao samo strujni izvor (naponski je isključen, a točke kratko

spojene), tekla bi struja kroz RL granu $\bar{I}''_{RL} = 2 \cdot \frac{-j5}{10 + j5} = -0,4 - j0,8 \text{ A}$ (strujni djelitelj) u naznačenom smjeru.

Ukupna struja u grani RL iznosi: $\bar{I}_{RL} = \bar{I}' + \bar{I}''_{RL} = 7,6 - j4,8 \text{ A};$

Struja u grani s kondenzatorom koju daje strujni izvor iznosi:

$$\bar{I}''_c = 2 \cdot \frac{10 + j10}{10 + j5} = 2,4 + j0,8 \text{ A}$$

Ukupna struja kroz C granu iznosi:

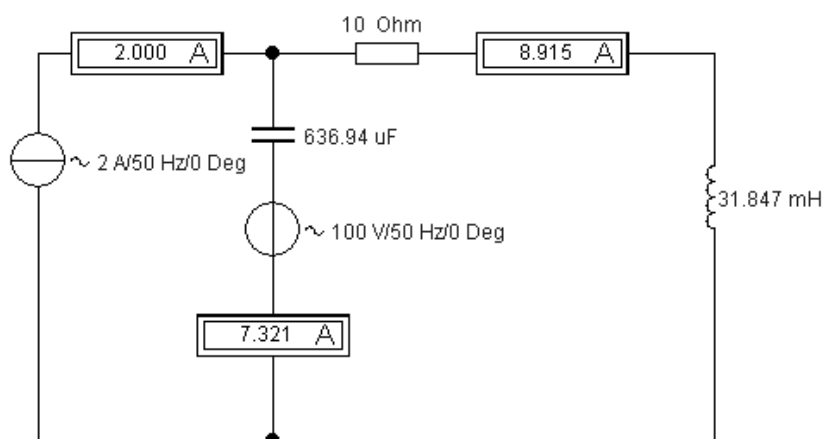
$$\bar{I}_c = \bar{I}' - \bar{I}''_c = 8 - j4 - (2,4 + j0,8) = 5,6 - j4,8 \text{ A}$$

Apsolutni iznosi struja u granama:

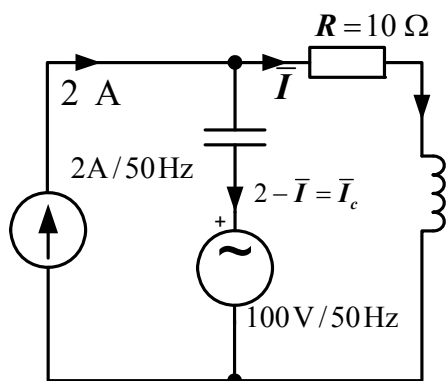
$$I_{RL} = \sqrt{7,6^2 + 4,8^2} = 8,98 \text{ A}$$

$$I_c = \sqrt{5,6^2 + 4,8^2} = 7,37 \text{ A}$$

Simulacija u EWB-u



141.) Zadatak 140. riješiti metodom Kirchhoffovih pravila.



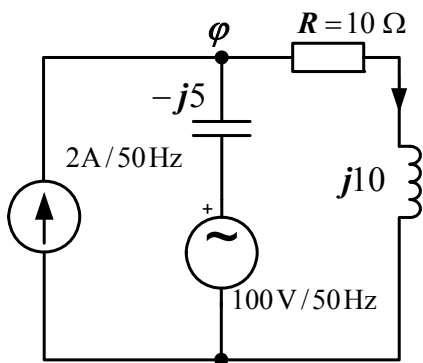
Sl. 2

141.a) Rješenje: Zakon petlje zapisuje se, za petlju u kojoj se nalazi naponski izvor:

$$100 + (2 - \bar{I}) \cdot (-j5) - \bar{I} \cdot 10 - \bar{I} \cdot j10 = 0$$

$$\bar{I} = \frac{20 - j2}{2 + j1} = 7,6 - j4,8 \text{ A}$$

$$\bar{I}_c = 2 - \bar{I} = 2 - 7,6 + j4,8 = -5,6 + j4,8 \text{ A}$$

142.) Zadatak 140. riješiti pomoću Millmanovog teorema

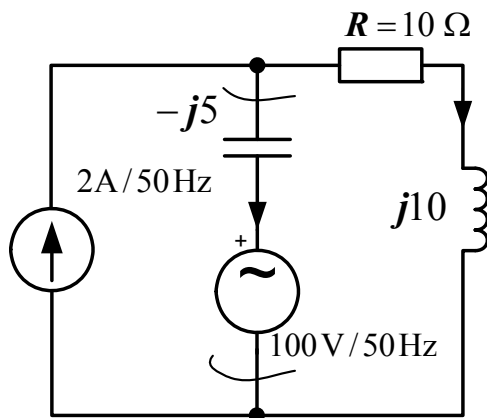
142.a) Rješenje: Najprije treba izračunati admitanciju RL grane:

$$\bar{Y}_{RL} = \frac{1}{10 + j10} = 0,05 - j0,05 \text{ S}$$

Potencijal čvora iznosi: $\varphi = \frac{100 \cdot j0,2 + 2}{j0,2 + 0,05 - j0,05} = 124 + j28 \text{ V}$

Struja grane RL iznosi: $\bar{I}_{RL} = \frac{124 + j28}{10 + j10} = 7,6 - j4,8 \text{ A}$

143.) Riješiti zadatak 140. pomoću Theveninovog teorema



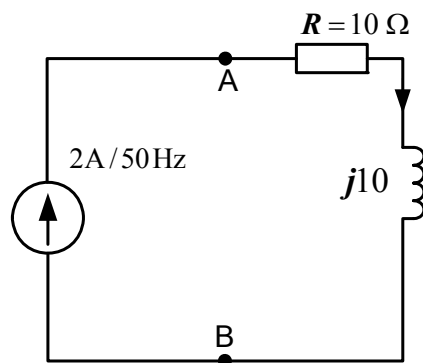
143.a) Rješenje: Izdvojiti granu s kondenzatorom iz spoja i izračunati Theveninov napon i Theveninov otpor (impedanciju).

Izračunavanje Th-napona

Th-napon u točkama AB iznosi:

$$\bar{U}_T = 2 \cdot (10 + j10) = 20 + j20 \text{ V}$$

Th-impedancija iznosi: $\mathbf{Z}_T = 10 + j10 \text{ } \Omega$



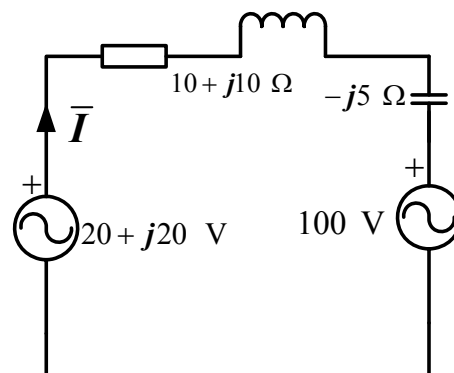
Spoj sada izgleda ovako:

Naponska jednačba novonastale petlje je:

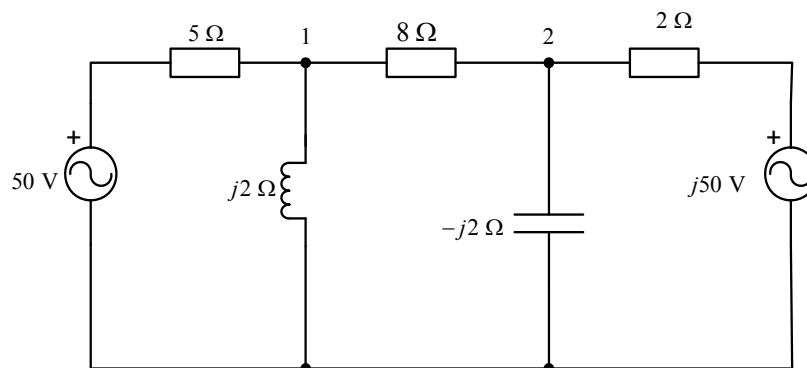
$$20 + j20 - \bar{I} \cdot (10 + j10) - \bar{I} \cdot (-j5) - 100 = 0$$

Sređivanjem dobijemo:

$$\bar{I} = \frac{-80 + j20}{10 + j5} = -5,6 + j4,8 \text{ A}$$



144.) Kolika jakost struje teče kroz otpornik $8\ \Omega$, u spoju na slici?



144.a) Rješenje: Otpornik $8\ \Omega$ odspojiti u točkama 1,2 i s obzirom na te točke izračunati Theveninov napon i Theveninovu impedanciju.

Theveninov napon iznosi:

$$U_T = U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 50 \cdot \frac{j2}{5 + j2} - j50 \cdot \frac{-j2}{2 - j2} = -18,1 - j7,758 \text{ (V)}$$

Theveninova impedancija iznosi:

$$Z_T = \frac{j2 \cdot 5}{5 + j2} + \frac{2 \cdot (-j2)}{2 - j2} = 1,689 + j0,724 \text{ (}\Omega\text{)}$$

Struja kroz otpornik $8\ \Omega$ iznosi:

$$I = \frac{U_T}{R_T + 8} = \frac{19,69}{9,716} = 2,02 \text{ (A)}$$

144.b) Rješenje metodom napona čvorova u MATLAB-u

`FI=solve('FI1*(1/5+1/(i*2)+1/8)-FI2*1/8=50*1/5','FI2*(1/2+1/(-i*2)+1/8)-FI1*1/8=i*50*1/2')`izračun napona čvorova

`FI1=eval(FI.FI1)`

`FI2=eval(FI.FI2)`

`U12=FI1-FI2`

`I=U12/8`

`Ia=abs(I)`

`> FI =`

`FI1: [1x1 sym]`

`FI2: [1x1 sym]`

`FI1 =`

`7.0855 + 21.0007i`

`FI2 =`

`22.4251 + 26.2600i`

`U12 =`

`-15.3397 - 5.2593i`

`I =`

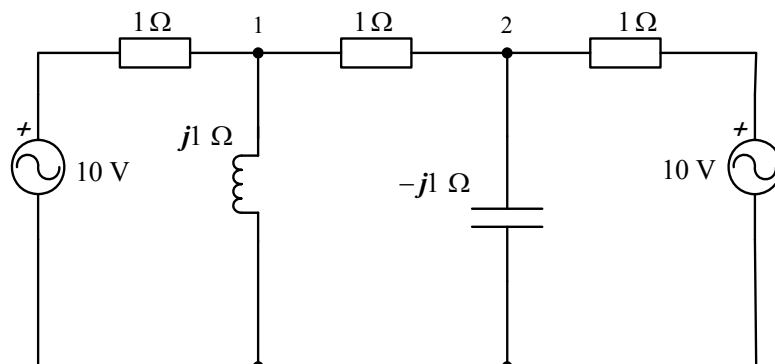
`-1.9175 - 0.6574i`

`Ia =`

`2.0270 A`

`>>`

145.) Potrebno je izračunati napon U_{12} u spoju prema slici metodom napona čvorova.



145.a) Rješenje: Zapisati jednadžbe čvorova:

$$\text{Čvor 1} \dots \varphi_1 \cdot (2 - j1) - \varphi_2 = 10$$

$$\text{Čvor 2} \dots -\varphi_1 + \varphi_2 \cdot (2 + j1) = 10 \cdot (2 - j1)$$

$$\text{Slijedi: } 4 \cdot \varphi_2 = 10 \cdot (2 - j1) + 10; \quad \varphi_2 = 7,5 - j2,5 \text{ V}$$

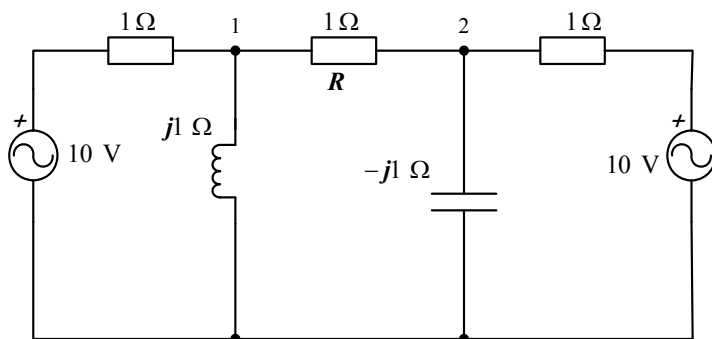
$$\text{Potencijal čvora 2 iznosi: } \varphi_1 = \frac{\varphi_2 + 10}{2 - j1} = \frac{17,5 - 2,5}{2 - j1} = 7,5 + j2,5 \text{ V}$$

$$\text{Napon } \bar{U}_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 7,5 + j2,5 - (7,5 - j2,5) = j5 \text{ V}$$

145.b) Rješenje u MATLAB-u

```
FI=solve('FI1*(1/1+1/(i*1)+1/1)-FI2*1/1=10*1/1','FI2*(1/1+1/(-i*1)+1/1)-FI1*1/1=10*1/1')
FI1=eval(FI.FI1)
FI2=eval(FI.FI2)
U12=FI1-FI2
I=U12/8
-----
>> FI =
    FI1: [1x1 sym]
    FI2: [1x1 sym]
FI1 =
    7.5000 + 2.5000i
FI2 =
    7.5000 - 2.5000i
U12 =
    0 + 5.0000i V
>>
```

146.) Riješiti prethodni zadatak Theveninovim teoremom.

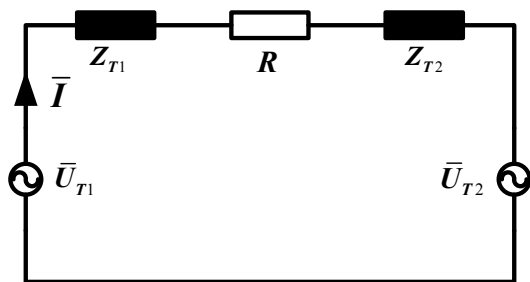


146.a) Rješenje: Otpornik R izdvojiti iz mreže čime spoj poprima jednostavniji oblik i izračunati u točkama 1 i 2 Th-napone i Th-impedancije:

$$\bar{U}_{T1} = 10 \cdot \frac{j1}{1+j1} = 5 + j5 \text{ V}; \quad Z_{T1} = \frac{1 \cdot j1}{1+j1} = 0,5 + j0,5 \text{ } \Omega$$

$$\bar{U}_{T2} = 10 \cdot \frac{-j1}{1-j1} = 5 - j5 \text{ V}; \quad Z_{T2} = \frac{-j1}{1-j1} = 0,5 - j0,5 \text{ } \Omega$$

Theveninov spoj izgleda ovako:



Naponska jednačba za dotičnu petlju s odabranim referentnim smjerom struje izgleda:

$$\bar{U}_{T1} - \bar{I} \cdot Z_{T1} - \bar{I} \cdot R - \bar{I} \cdot Z_{T2} - \bar{U}_{T2} = 0$$

Iz jednačbe se može izraziti struja:

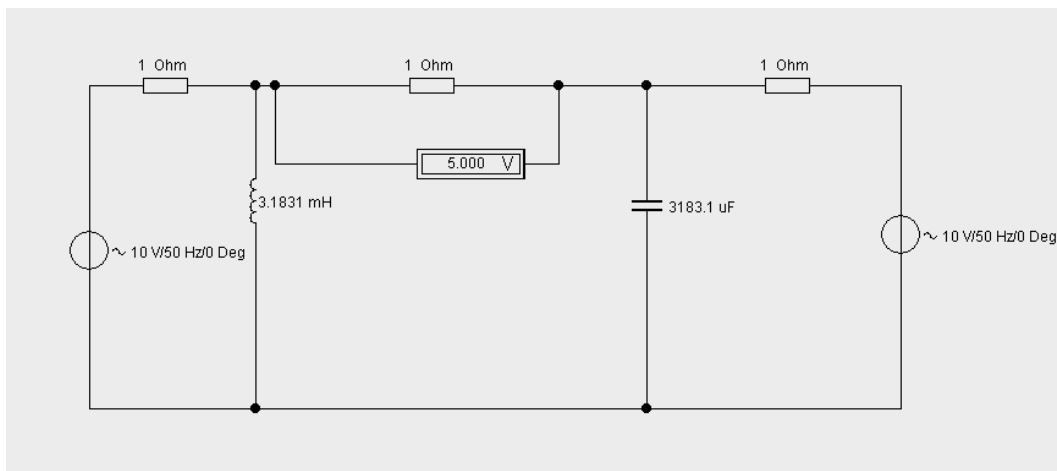
$$\bar{I} = \frac{\bar{U}_{T1} - \bar{U}_{T2}}{Z_{T1} + R + Z_{T2}} = \frac{5 + j5 - (5 - j5)}{2} = j5 \text{ A}$$

Napon u točkama 1 i 2 iznosi: $\bar{U}_{12} = \bar{I} \cdot R = j5 \text{ V}$

Za $f = 50 \text{ Hz}$ induktivitet zavojnice koja ima induktivni otpor 1Ω iznosi:

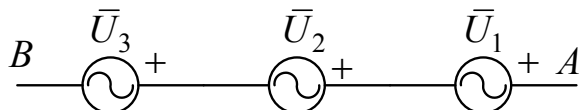
$$L = \frac{1}{100\pi} = 3,1831 \text{ mH}$$

Potrebni kapacitet za $X_C = 1 \Omega$ iznosi: $C = \frac{1 \cdot 10^6}{100\pi} = 3183,1 \mu\text{F}$



147.) Potrebno je izračunati napon u točkama A i B u spoju prema slici. Zadatak riješiti analitički i grafički (nacrtati topografski dijagram) ako je:

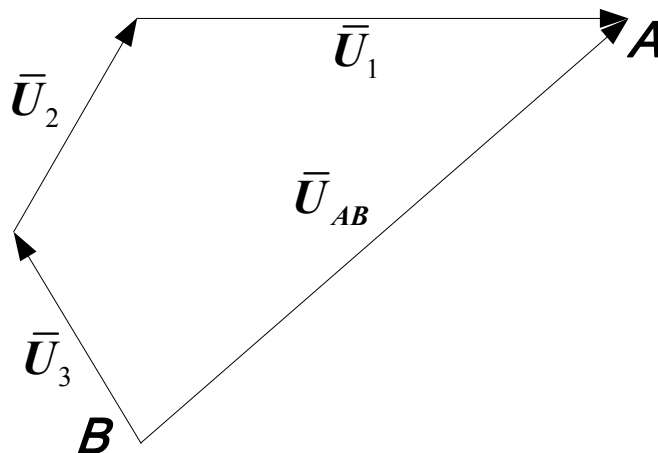
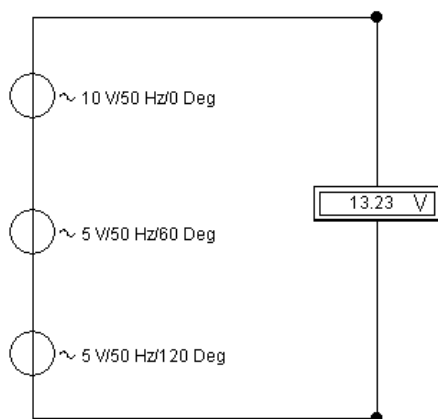
$$\bar{U}_1 = 10 \cdot e^{j0^\circ} \text{ V}; \bar{U}_2 = 5 \cdot e^{j60^\circ} \text{ V}; \bar{U}_3 = 5 \cdot e^{j120^\circ}$$



147.a) Rješenje: $\bar{\varphi}_A = \bar{\varphi}_B + \bar{U}_3 + \bar{U}_2 + \bar{U}_1$ pa je napon u točkama A i B

$$\bar{U}_{AB} = 10 + 2,5 + j2,5\sqrt{3} - 2,5 + j2,5\sqrt{3} = 10 + j5\sqrt{3} \text{ V}$$

$$U_{AB} = 13,23 \text{ V}$$



TROFAZNI SIMETRIČNI I NESIMETRIČNI SUSTAV

148.) Na simetrični direktni sustav faznog napona $3 \times 220 \text{ V}_{\text{ef}}$ priključeno je simetrično trošilo u spoju zvijezda fazne impedancije $Z_f = 3 + j4 \ \Omega$. Potrebno je izračunati struje koje teku kroz trošilo i struje koje teku kroz linije, te nacrtati fazorski dijagram.

148a.) Rješenje: Apsolutni iznos impedancije iznosi: $Z_f = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \ \Omega$

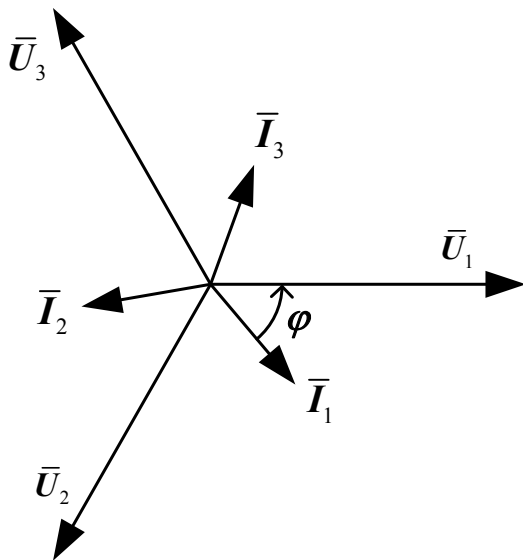
Impedancija je omsko-induktivna pa fazna struja zaostaje za faznim naponom za kut φ .

$$\varphi = \arctan \frac{4}{3} = 53,13^\circ$$

$$\text{Apsolutni iznos fazne struje je: } I_f = \frac{U_f}{Z_f} = \frac{220}{5} = 44 \text{ A}$$

U spoju zvijezda fazna struja je jednaka linijskoj. $I_L = I_f$

$$\text{Linijski napon iznosi: } U_L = \sqrt{3} \cdot U_f \approx 380 \text{ V}$$

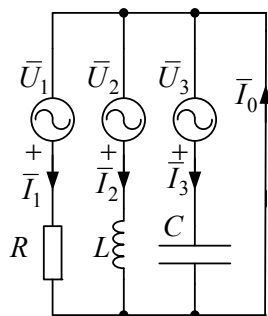


149.) Zadan je nesimetrični trofazni sustav s nulvodičem kao na slici.

Fazni naponi izvora su: $\bar{U}_1 = 220 \cdot e^{j0^\circ}$; $\bar{U}_2 = 220 \cdot e^{-j120^\circ}$; $\bar{U}_3 = 220 \cdot e^{j120^\circ}$

Otpor nulvodiča se može zanemariti, tj. $R_0 = 0 \Omega$. Sve impedancije iznose 100Ω .

Treba odrediti linijske struje u kompleksnom obliku te izračunati struju nul voda \bar{I}_0



149.a) Rješenje:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{R} = \frac{220}{100} = 2,2 \text{ A};$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_2}{jX_L} = \frac{220 \cdot e^{j240}}{100 \cdot e^{j90}} = 2,2 \cdot e^{j150} \text{ A};$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_3}{-jX_C} = \frac{220 \cdot e^{j120}}{100 \cdot e^{-j90}} = 2,2 \cdot e^{j210} \text{ A}$$

Struja nul voda se računa prema izrazu:

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 2,2 + 2,2 \cdot e^{j150} + 2,2 \cdot e^{j210}$$

$$\bar{I}_0 = 2,2 + 2,2 \cdot (-\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) + 2,2 \cdot (-\cos 30^\circ - j \sin 30^\circ)$$

$$\bar{I}_0 = 2,2 - 4,4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -1,61 = 1,61 \cdot e^{j180} \text{ A}$$

150.) Pri spajanju namota sinkronog generatora koji su spojeni u zvijezdu, greškom je zamijenjen početak i kraj treće faze. Koliki naponi su se pojavili na priključnicama generatora, ako je fazni napon 220 V ?

150.a) Rješenje: Fazni naponi iznose:

$$\bar{U}_1 = 220 \cdot e^{j0} = 220 \text{ V}$$

$$\bar{U}_2 = 220 \cdot e^{j240} = 220 \cdot e^{j(-120)} \text{ V}$$

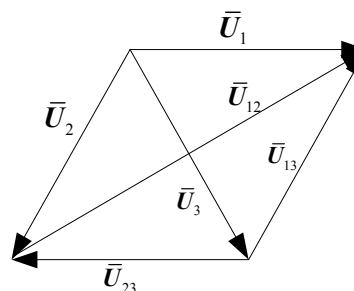
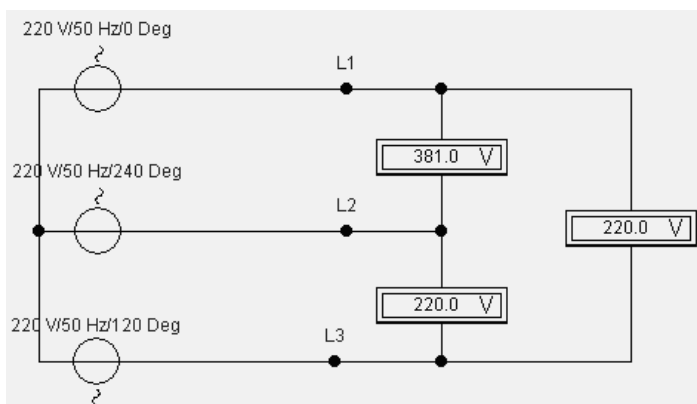
$$\bar{U}_3 = 220 \cdot e^{j(120+180)} = 220 \cdot e^{j(-60)} \text{ V}$$

Linijski naponi iznose:

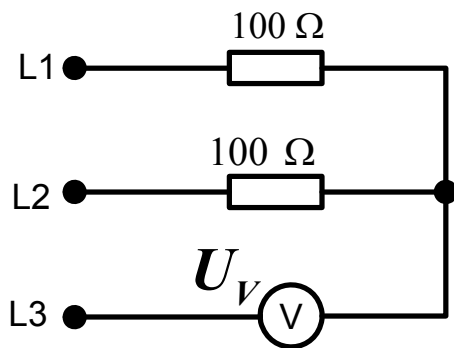
$$\begin{aligned} \bar{U}_{12} &= \bar{U}_1 - \bar{U}_2 = 220 - 220 \cdot e^{j(-120)} = 220 \cdot (1 - a^2) \\ &= 220 \cdot \left[1 - (-0,5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}) \right] = 220 \cdot (1,5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}) = 220 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{j(\arctg \frac{\sqrt{3}}{3})} \\ &= 220 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{j30} \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_{13} &= \bar{U}_1 - \bar{U}_3 = 220 - 220 \cdot e^{j(-60)} \\ &= 220 \cdot \left[1 - (0,5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}) \right] = 220 \cdot (0,5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}) = 220 \cdot e^{j(\arctg \sqrt{3})} \\ &= 220 \cdot e^{j60} \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_{23} &= \bar{U}_2 - \bar{U}_3 = 220 \cdot a^2 - 220 \cdot e^{-j60} \\ &= 220 \cdot \left[-0,5 - j\frac{\sqrt{3}}{2} - (0,5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}) \right] = 220 \cdot (-1) = 220 \cdot e^{j180} \text{ V} \end{aligned}$$



151.) Potrebno je izračunati pokazivanje idealnog V-metra u spoju prema slici 4 ako je spoj napajan direktnim simetričnim sustavom napona $3 \times 400 \text{ V}_{\text{ef}}$.



Sl. 4

151.a) Rješenje: V-metar pokazuje apsolutni iznos napona, čiji je fazor:

$$\bar{U}_v = \bar{U}_3 - \bar{U}_0.$$

Napon zvjezdista računa se pomoću Millmanovog teorema prema izrazu:

$$\bar{U}_0 = \frac{\bar{U}_1 \cdot Y + \bar{U}_2 \cdot Y}{2 \cdot Y} = \frac{\bar{U}_1 + \bar{U}_2}{2} = -\frac{\bar{U}_3}{2}$$

$$\bar{U}_v = \bar{U}_3 - \left(-\frac{\bar{U}_3}{2} \right) = \frac{3}{2} \bar{U}_3;$$

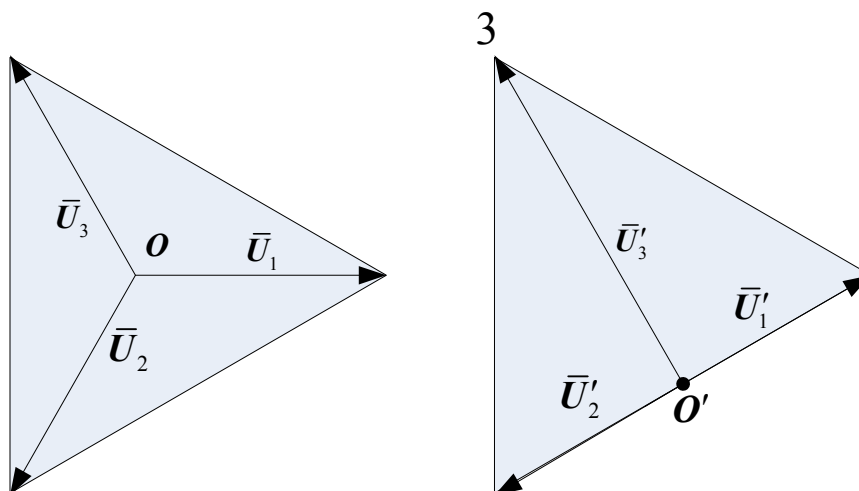
Napon kojeg pokazuje V-metar iznosi:

$$U_v = \frac{3}{2} \cdot \frac{400}{\sqrt{3}} = 200 \cdot \sqrt{3} = 346,41 \text{ V}$$

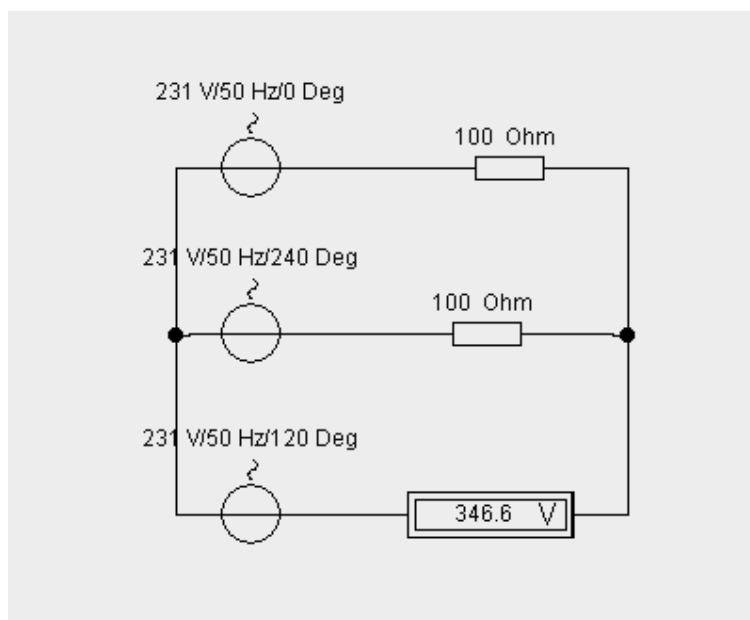
151.b) Rješenje - grafičko:

Faza u kojoj se nalazi V-metar je ustvari u prekidu jer je V-metar idealni. Zbog toga se zvjezdista trošila pomakne u točku O' . Napon koji pokazuje V-metar, predstavlja u fazorskom dijagramu fazor $\bar{U}_{3O'}$ čija je apsolutna vrijednost:

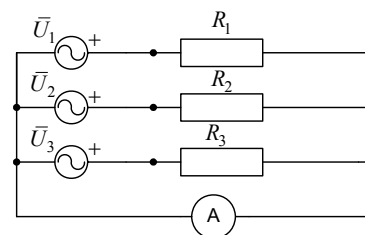
$$U_{3O'} = \frac{400 \cdot \sqrt{3}}{2} = 346,41 \text{ V (visina istostraničnog trokuta)}$$



151.c) Rješenje - simulacija u EWB-u



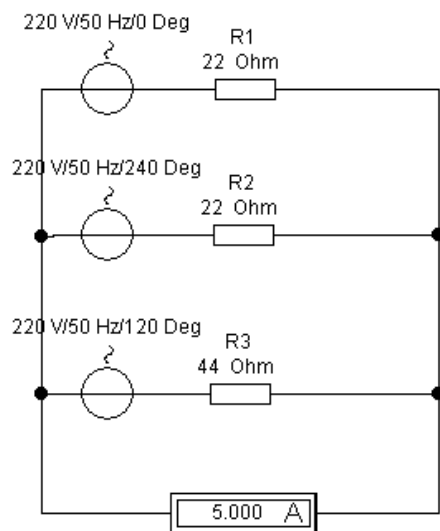
152. Potrebno je izračunati R_1, R_2 i R_3 u spoju na slici koji je priključen na trofazni simetrični direktni sustav faznog napona $U_f = 220\text{ V}$, ako je: $R_1 = R_2 = R$; $R_3 = 2R$, a pokazivanje Ametra je 5 A .



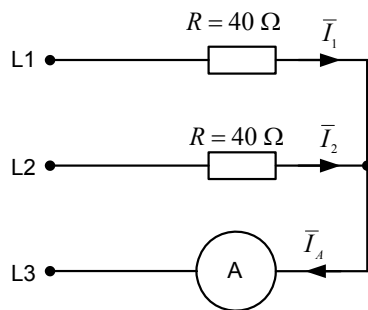
152.a) Rješenje: $\bar{I}_0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$;

Apsolutni iznos struje 0-voda je : $I_0 = \sqrt{(\text{Re}(\bar{I}_0))^2 + (\text{Im}(\bar{I}_0))^2}$.

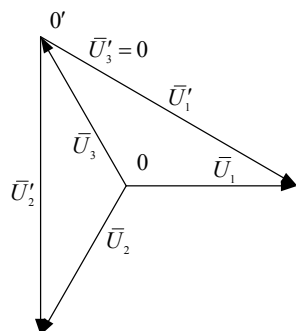
Slijedi : $R_1 = R_2 = 22\ \Omega$; $R_3 = 44\ \Omega$



153.) Koliko pokazuje idealni A-metar u spoju prema slici, ako je:
 $U = 3 \times 400 \text{ (V)/50 (Hz)}$?



153.a) Rješenje: Pripadni fazorski dijagram napona



Iz dijagrama je vidljivo da je: $\bar{U}'_1 = 400 \cdot e^{-j30^\circ} \text{ (V)}$; $\bar{U}'_2 = -j400 \text{ (V)}$

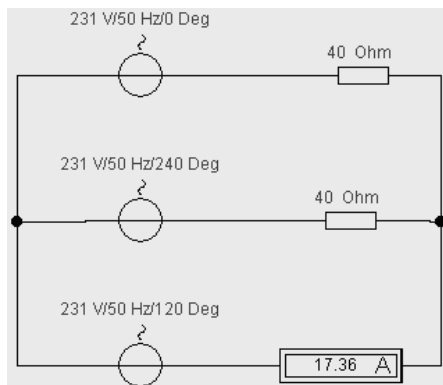
Struje u fazi L1 iznosi: $\bar{I}_1 = \frac{400 \cdot e^{-j30^\circ}}{40} = 10 \cdot e^{-j30^\circ} \text{ (A)}$; $\bar{I}_2 = -j10 \text{ (A)}$

$$\bar{I}_A = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 5 \cdot \sqrt{3} - j5 - j10 = 5 \cdot \sqrt{3} - j15;$$

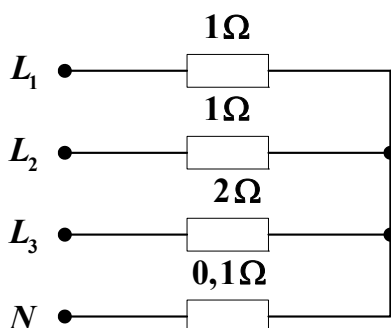
Struja A-metra je;

$$I_A = \sqrt{(5 \cdot \sqrt{3})^2 + 15^2} = \sqrt{300} = 10 \cdot \sqrt{3} = 17,3 \text{ (A)}$$

Simulacija u EWB-u



154.) Potrebno je izračunati energiju koja se na omskom otporu 0-voda pretvori u toplinu u vremenu 15 min. Spoj na slici je napajan direktnim trofaznim simetričnim sustavom napona $3 \times 400 \text{ V}_{\text{ef}}$.



154.a) Rješenje:

Izračunati napon zvjezdišta Millmanovim teoremom. $\bar{U}_0 = \frac{\bar{U}_1 \cdot 1 + \bar{U}_2 \cdot 1 + \bar{U}_3 \cdot 0,5}{12,5}$

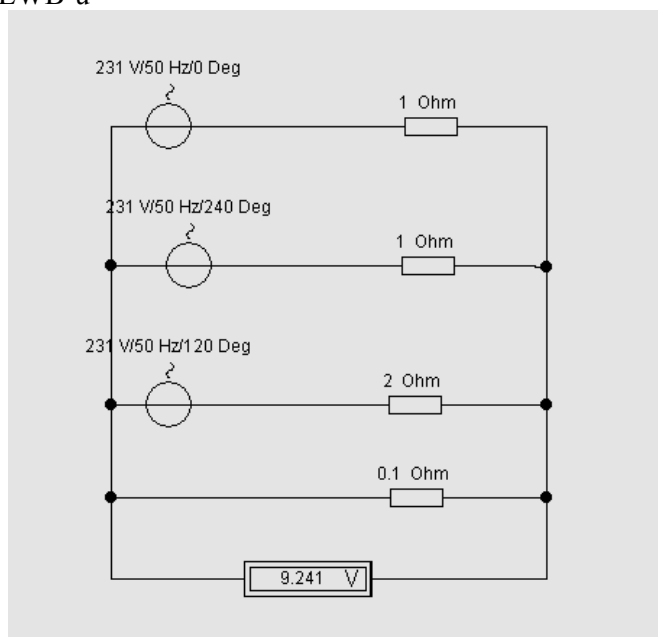
Budući da je $\bar{U}_1 + \bar{U}_2 = -\bar{U}_3$ slijedi da je:

$$\bar{U}_0 = \frac{-\bar{U}_3 + 0,5 \cdot \bar{U}_3}{12,5} = -\frac{1}{25} \cdot \bar{U}_3; \quad U_0 = \frac{400}{25 \cdot \sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}} = 9,237 \text{ V}$$

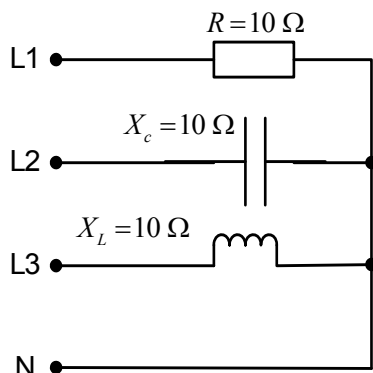
Snaga na otporu 0-voda iznosi: $P_0 = \frac{U_0^2}{R_0} = \frac{1}{0,1} \cdot \frac{256}{3} = 853,33 \text{ W}$.

Potrošena energija u vremenu 15 min iznosi: $W = P_0 \cdot t = 853,33 \cdot \frac{1}{4} = 213,332 \text{ Wh}$

Simulacija u EWB-u

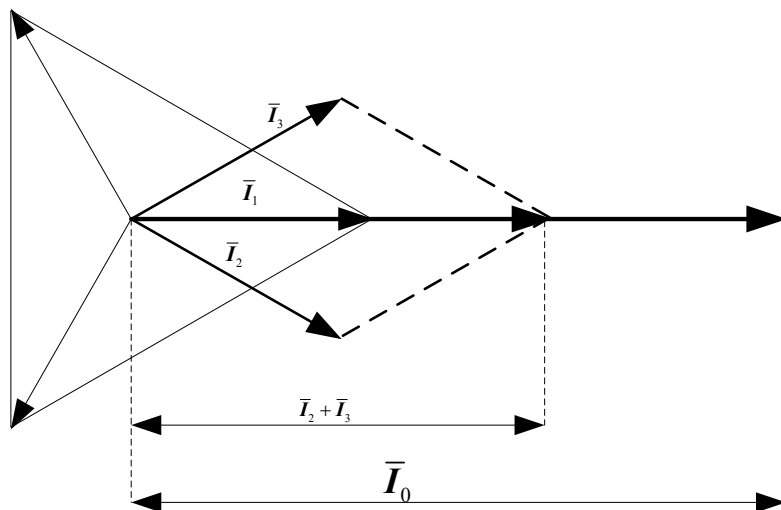


155.) Potrebno je izračunati struju 0-voda u spoju prema slici, ako je spoj napajan simetričnim direktnim sustavom napona 3x400 V.



155.a) Rješenje: $\bar{I}_0 = \frac{U_1}{10} + \frac{a^2 \cdot U_1}{-j10} + \frac{a \cdot U_1}{j10} = \frac{U_1}{10} \cdot (1 + ja^2 - ja) = 63 \text{ A}; \quad I_0 = 63 \text{ A}$

Grafičko rješenje:



156.) Termoakumulaciona peć nazivne snage 3500 W ima tri grijača spojena u zvijezdu bez 0-voda. (0-vod je u prekidu). Kolika će biti snaga peći ako jedan grijač pregori?

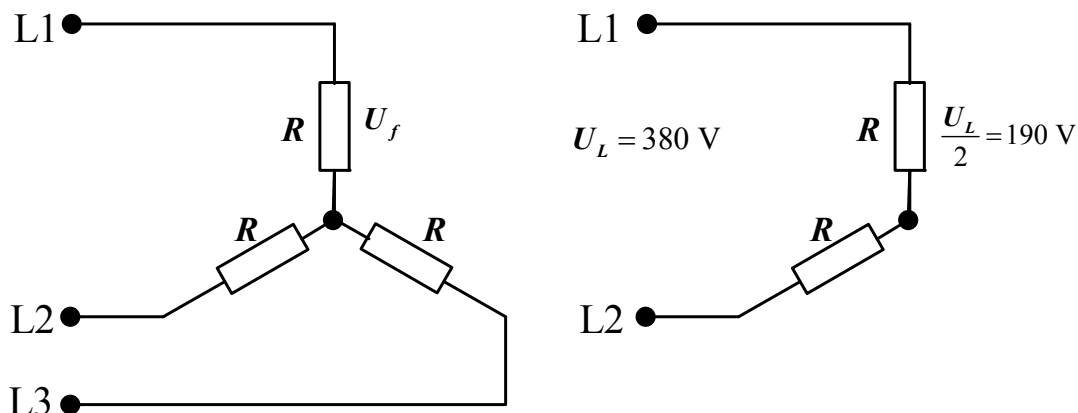
156.a) Rješenje: U normalnom pogonu snaga peći iznosi: $P_{3\Box} = 3 \cdot \frac{U_f^2}{R} = \frac{3}{R} \cdot \frac{U^2}{3} = \frac{U^2}{R}$

Ako u jednoj fazi pregori osigurač, preostali grijači su spojeni serijski na linijski napon pa je:

$$P_{2\Box} = \frac{U^2}{2R} = \frac{1}{2} \cdot P_{3\Box} = \frac{3500}{2} = 1750 \text{ W}$$

157.) U termoakumulacijskoj peći su tri jednaka grijača s otporima $38 \, \Omega$ spojena u zvijezdu bez 0-voda. Za koliko wati se smanji snaga peći, ako je jedna od faza isključena djelovanjem osigurača ?

157.a) Rješenje:



U „normalnom“ stanju na svakom grijaču vlada fazni napon (u našem slučaju 220 V) pa

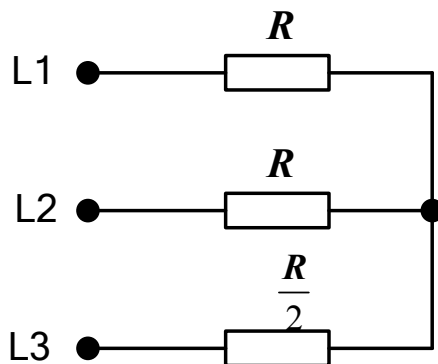
je snaga tri grijača jednaka: $P_3 = 3 \cdot \frac{U_f^2}{R} = 3 \cdot \frac{380^2}{3 \cdot 38} = 3800 \text{ W}$

Nestankom jedne faze preostala dva grijača su u serijskom spoju priključena na linijski napon pa je njihova snaga jednaka:

$$P_2 = \frac{U_L^2}{2 \cdot R} = \frac{(\sqrt{3} \cdot U_f)^2}{2 \cdot R} = \frac{3 \cdot U_f^2}{2 \cdot R} = \frac{P_3}{2} = 1900 \text{ W}$$

To znači da se je snaga smanjila za : $\Delta P = P_3 - P_2 = 1900 \text{ W}$

158.) Tri grijača nazivnih podataka: $1\text{kW} / 220\text{ V}$; $1\text{kW}/220\text{ V}$; $2\text{kW}/220\text{ V}$ spojeni su u zvijezdu bez 0-voda i priključeni na trofazni simetrični direktni sustav faznih napona 220 V . Kolika se snaga takovog trošila?



158.a) Rješenje: Otpor R iznosi:

$$R = \frac{U_n^2}{P_n} = \frac{28400}{1000} = 48,4 \, \Omega$$

Opterećenje je nesimetrično pa se javlja napon zvjezdišta koji iznosi:

$$\bar{U}_0 = \frac{\bar{U}_1 \cdot Y_1 + \bar{U}_2 \cdot Y_2 + \bar{U}_3 \cdot Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{\bar{U}_3}{4} \text{ V jer je:}$$

$$Y_1 = Y_2 = Y; \quad Y_3 = 2 \cdot Y; \quad \bar{U}_1 + \bar{U}_2 = -\bar{U}_3$$

Napon na grijaču u prvoj fazi iznosi:

$$\bar{U}'_1 = \bar{U}_1 - \bar{U}_0 = \bar{U}_1 - \frac{\bar{U}_3}{4} = \frac{4 \cdot \bar{U}_1 - a \cdot \bar{U}_1}{4} = \frac{\bar{U}_1}{4} \cdot (4 - a) = 55 \cdot (4,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\text{Apsolutni iznos je: } U_1 = 55 \cdot \sqrt{4,5^2 + \frac{3}{4}} = 252,02 \text{ V}$$

Apsolutni iznos napona u drugoj fazi je isti : $U_2 = 252,02 \text{ V}$

U trećoj fazi napon iznosi: $\bar{U}'_3 = \bar{U}_3 - \bar{U}_0 = 0,75 \cdot \bar{U}_3$; $U_3 = 165 \text{ V}$

Snage pojedinih grijača iznose:

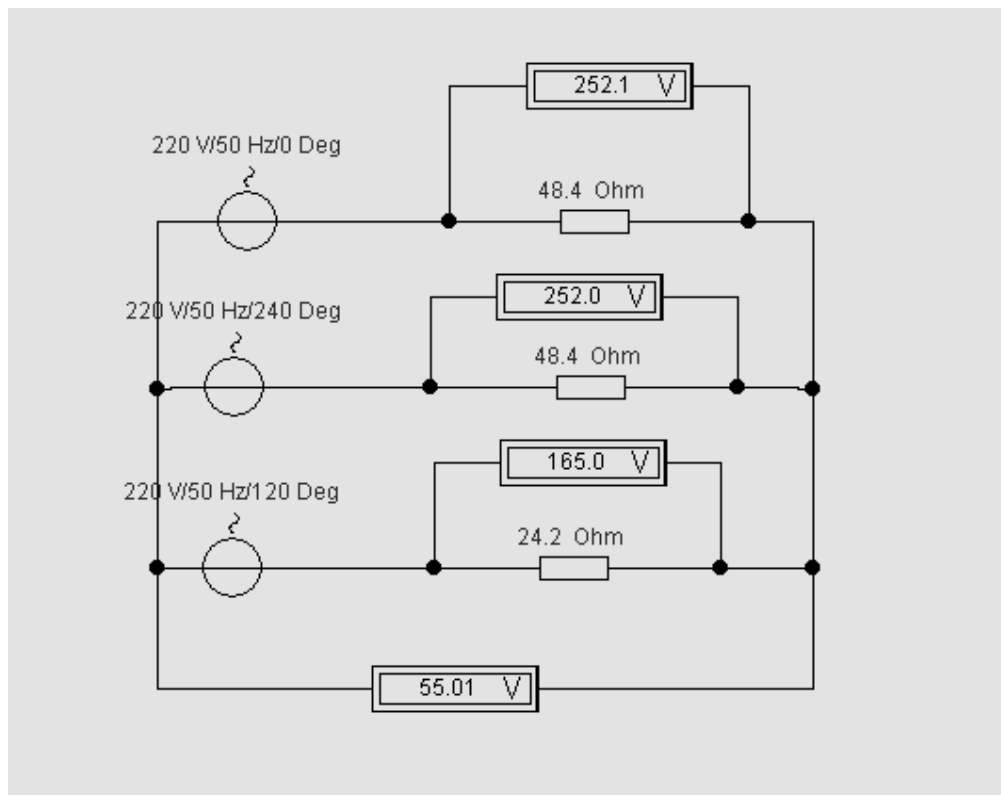
$$P'_1 = \frac{U_1'^2}{R} = \frac{252,02^2}{48,4} = 1312,274 \text{ W}; \quad P'_2 = 1312,274 \text{ W}$$

$$P'_3 = \frac{U_3'^2}{R} = \frac{165^2}{24,2} = 1125 \text{ W}$$

Ukupna snaga iznosi: $P' = P'_1 + P'_2 + P'_3 = 3749,548 \text{ W}$

Da su sva tri grijača bila istih nazivnih snaga (1 kW) ukupna snaga bi bila:

$P = 3 \text{ kW}$ jer bi na svakom grijaču bio nazivni napon 220 V (simetrično opterećenje).



158.b) Rješenje u MATLAB-u

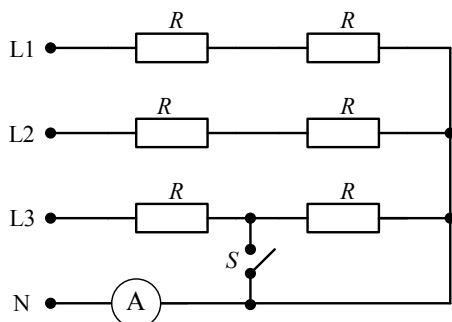
```
function Uo=napon(U,Y1,Y2,Y3,Yo)
%ako postoji idealni 0-vod za Yo uvrstimo inf
a=exp(2*pi*i/3);
a1=exp(4*pi*i/3);
U0=(U*Y1+a1*U*Y2+a*U*Y3)/(Y1+Y2+Y3+Yo)
U0a=abs(U0)
U1p=U-U0
U2p=a1*U-U0
U3p=a*U-U0
Ua1p=abs(U1p)
Ua2p=abs(U2p)
Ua3p=abs(U3p)
I1=U1p*Y1
I2=U2p*Y2
I3=U3p*Y3
Io=I1+I2+I3
Ioa=abs(Io)
I1a=abs(I1)
I2a=abs(I2)
I3a=abs(I3)
S1=U1p*conj(I1)
```

```

S2=U2p*conj(I2)
S3=U3p*conj(I3)
S=S1+S2+S3
kut1=180/pi*angle(U1p)
kut2=180/pi*angle(U2p)
kut3=180/pi*angle(U3p)
Po=U0a^2*Yo
-----
>> napon(220,1/48.4,1/48.4,2/48.4,0)
U0 =
-27.5000 +47.6314i
U0a =
55.0000
U1p =
2.4750e+002 -4.7631e+001i
U2p =
-8.2500e+001 -2.3816e+002i
U3p =
-8.2500e+001 +1.4289e+002i
Ua1p =
252.0417
Ua2p =
252.0417
Ua3p =
165.0000
I1 =
5.1136 - 0.9841i
I2 =
-1.7045 - 4.9206i
I3 =
-3.4091 + 5.9047i
Io =
0
Ioa =
0
I1a =
5.2075
I2a =
5.2075
I3a =
6.8182
S1 =
1.3125e+003 -2.8422e-014i
S2 =
1.3125e+003 -5.6843e-014i
S3 =
1.1250e+003
S =
3.7500e+003 -8.5265e-014i
kut1 =
-10.8934
kut2 =
-109.1066
kut3 =
120.0000
Po =
0
>>

```

159.) Za koliko će se promijeniti pokazivanje A-metra koji pokazuje efektivne vrijednosti nakon zatvaranja sklopke S, u spoju na slici ako je $U = 220\text{ V}$; $R = 11\ \Omega$?



159a.) Rješenje: Kod otvorene sklopke S opterećenje je simetrično što znači da su struja 0-voda i pokazivanje A-metra jednako nuli. Ako se sklopka S zatvori, nastaje nesimetrično opterećenje pa će se pojaviti struja 0-voda koju će pokazivati A-metar.

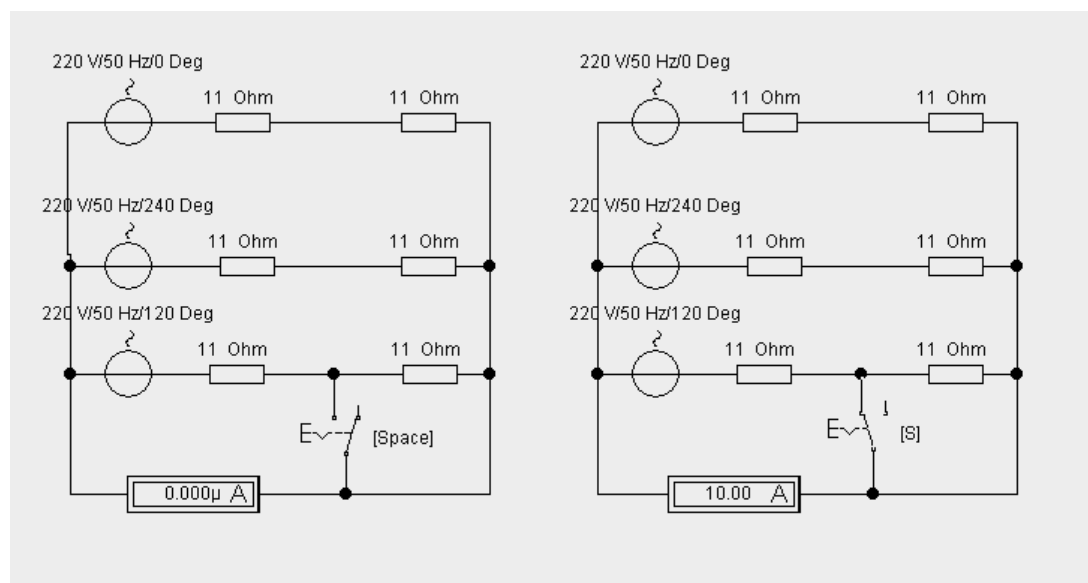
Nakon zatvaranja sklopke S je: $U = 220\text{ V}$; $Y_1 = Y_2 = \frac{1}{22} S$; $Y_3 = \frac{1}{11} S$; $Y_0 = \infty$

```
function Uo=napon_Io(U,Y1,Y2,Y3,Yo)
%ako postoji 0-vod za Yo uvrstimo inf
a=exp(2*pi*i/3);% operator rotacije za 120 stupnjeva
a1=exp(4*pi*i/3);%operator rotacije za 240 stupnjeva
U0=(U*Y1+a1*U*Y2+a*U*Y3)/(Y1+Y2+Y3+Yo)% napon zvijezdišta u kompleksnom obliku
U0a=abs(U0) % napon zvijezdišta (apsolutni iznos)
U1p=U-U0 % napon na trošilu u fazi 1
U2p=a1*U-U0 % napon na trošilu u fazi 2
U3p=a*U-U0 % napon na trošilu u fazi 3
Ua1p=abs(U1p) % napon na trošilu u fazi 1 (apsolutni iznos)
Ua2p=abs(U2p) % napon na trošilu u fazi 2 (apsolutni iznos)
Ua3p=abs(U3p) % napon na trošilu u fazi 3 (apsolutni iznos)
I1=U1p*Y1 %struja kroz trošilo faze 1
I2=U2p*Y2 %struja kroz trošilo faze 2
I3=U3p*Y3 %struja kroz trošilo faze 3
Io=I1+I2+I3 % struja 0-voda
Ioa=abs(Io) % struja 0-voda (apsolutni iznos)
```

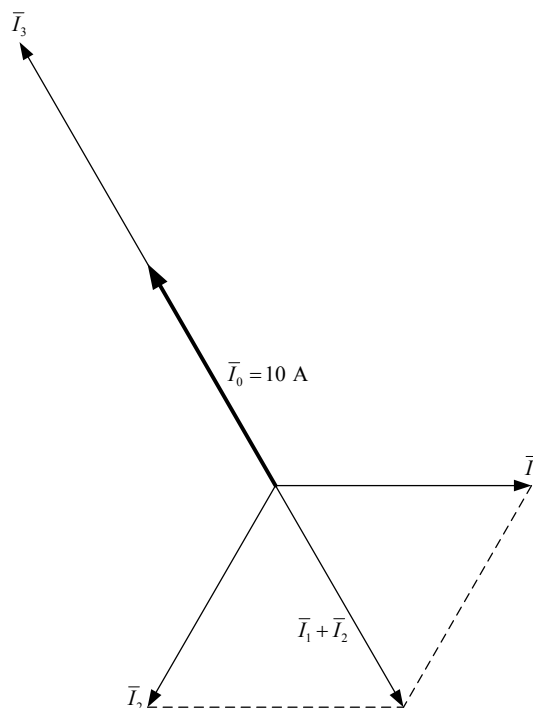
```
U0a =
    0
U1p =
    220
U2p =
-1.1000e+002 -1.9053e+002i
U3p =
-1.1000e+002 +1.9053e+002i
Ua1p =
    220
Ua2p =
    220.0000
Ua3p =
    220
I1 =
    10
I2 =
-5.0000 - 8.6603i
I3 =
-10.0000 +17.3205i
Io =
-5.0000 + 8.6603i
Ioa =
    10.0000
```

Pokazivanje A-metra nakon zatvaranja sklopke S je 10 A.

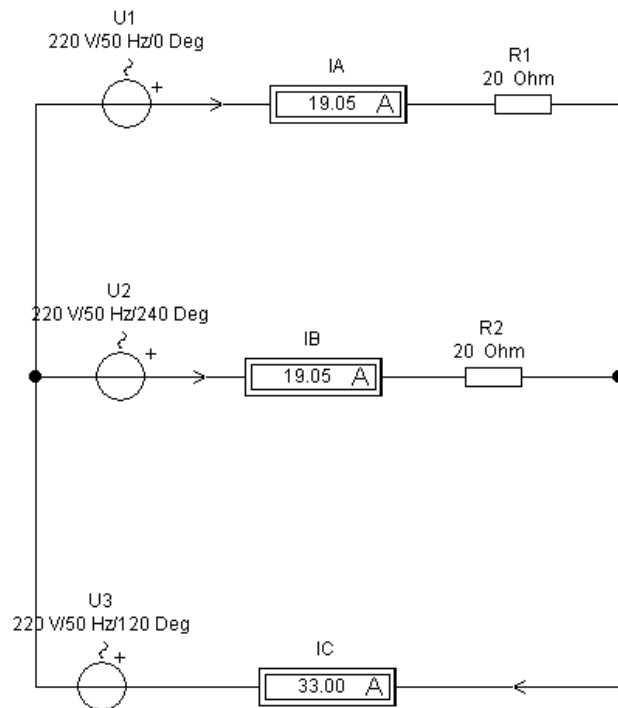
159.b) Rješenje: Simulacija u EWB-u



159.c) Grafičko rješenje: Zbog idealnog 0-voda napon zvjezdista je 0 V, prije i nakon zatvaranja sklopke S. Zato su struje u fazi s faznim naponima pojedinih faza. Nakon zatvaranja sklopke, S struja u trećoj fazi bit će dvostruko veća od struja u fazama 1 i 2. (otpornik od 11Ω je premošten). Struja 0-voda je jednaka sumi struja u pojedinim fazama.



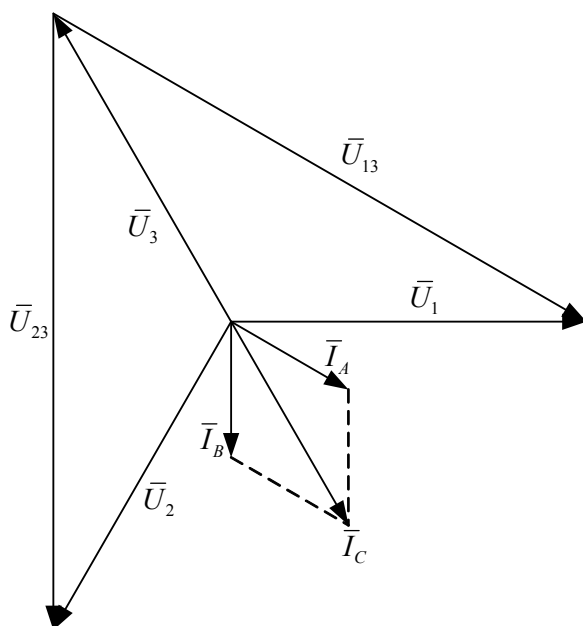
160.) Izračunajte pokazivanje A-metra u fazi 3 u spoju na slici. (A-metri imaju odziv na efektivnu vrijednost)



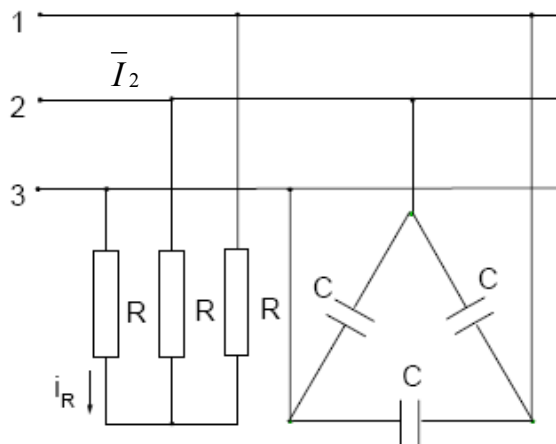
160.a) Rješenje:

```
k=pi/180;a=exp(i*120*k);a1=a^2;U1=220;U2=a1*U1;U3=a*U1;R1=20;R2=20;R3=0;
IA=(U1-U3)/R1
kutIA=angle(IA)/k
IAa=abs(IA)
IB=(U2-U3)/R2
kutIB=angle(IB)/k
IBa=abs(IB)
IC=IA+IB
ICa=abs(IC)
kutIC=angle(IC)/k
clc
```

```
>> IA =
    16.5000 - 9.5263i
kutIA =
   -30.0000
IAa =
    19.0526
IB =
   -0.0000 -19.0526i
kutIB =
   -90.0000
IBa =
    19.0526
IC =
    16.5000 -28.5788i
ICa =
     33
kutIC =
   -60.0000
```



161.) Složeno trošilo, prema slici, spojeno je na simetričnu trofaznu mrežu faznog napona $U_f = 220\text{ V}$, $f = 50\text{ Hz}$. Treba odrediti ukupnu struju u drugoj fazi \bar{I}_2 ako je $R = 6\ \Omega$; $X_c = 24\ \Omega$.



161.a) Rješenje:

```

k=pi/180;a=exp(i*120*k);a1=exp(i*240*k);U1=220;U2=a1*U1;U3=a*U1;R=6;XC=24;
IR=U2/R
IC1=(U2-U3)/(-i*24)
IC2=(U1-U2)/(-i*24)
ICu=IC1-IC2
Iu=IR+ICu
Iua=abs(Iu)
kut=angle(Iu)/k
-----
>> IR =
-18.3333 -31.7543i
IC1 =
15.8771 - 0.0000i
IC2 =
-7.9386 +13.7500i
ICu =
23.8157 -13.7500i
Iu =
5.4824 -45.5043i
Iua =
45.8333
kut =
-83.1301
>>

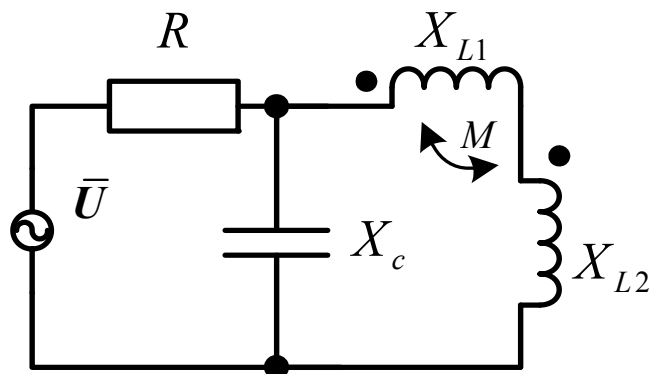
```

$$\bar{I}_2 = 45,83e^{-j83,13^\circ} \text{ A}$$

MEĐUINDUKTIVITET U MREŽAMA IZMJENIČNE STRUJE

162.) Koliki je napon izvora na slici, ako je snaga otpornika $P_R = 10 \text{ W}$?

$R = 40 \text{ } \Omega$; $X_{L1} = 32 \text{ } \Omega$; $X_{L2} = 2 \text{ } \Omega$; $X_c = 20 \text{ } \Omega$; $k = 0,375$.



162.a) Rješenje:

Najprije treba izračunati ukupni induktivni otpor suglasno spojenih zavojnica:

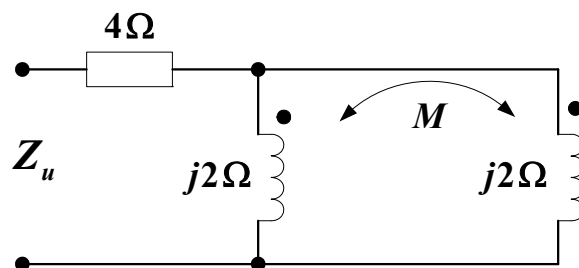
$$X_L = X_{L1} + X_{L2} + 2k\sqrt{X_{L1} \cdot X_{L2}} = 32 + 2 + 2 \cdot 0,375 \cdot \sqrt{64} = 40 \text{ } \Omega$$

$$\text{Impedancija spoja iznosi: } Z = R + \frac{jX_L \cdot (-jX_c)}{jX_L - jX_c} = 40 - j40 \text{ } \Omega$$

$$\text{Struja kroz otpornik je ukupna struja pa je: } I = \sqrt{\frac{P_R}{R}} = 0,5 \text{ A}$$

$$\text{Napon izvora iznosi: } U = I \cdot Z = 0,5 \cdot 40 \cdot \sqrt{2} = 28,28 \text{ V}$$

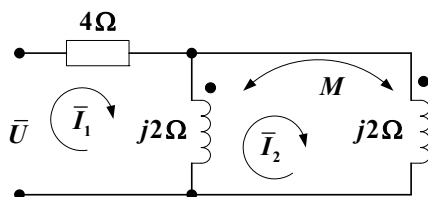
163.) Potrebno je izračunati ulaznu impedanciju spoja na slici ako je $X_M = 1 \Omega$.



163.a) Rješenje:

Ulazna impedancija je jednaka omjeru napona i ukupne struje spoja : $Z_u = \frac{\bar{U}}{\bar{I}_1}$

Međuinduktivni otpor iznosi: $X_M = 1 \Omega$



Jednadžbe petlji su: 1.) $\bar{U} = 4 \cdot \bar{I}_1 + (\bar{I}_1 - \bar{I}_2) \cdot j2 + \bar{I}_2 \cdot j1 = 4\bar{I}_1 + j2\bar{I}_1 - j\bar{I}_2$

2.) $(\bar{I}_1 - \bar{I}_2) \cdot j2 - \bar{I}_2 \cdot j2 + \bar{I}_2 \cdot j1 - (\bar{I}_1 - \bar{I}_2) \cdot j1 = 0$

Sređivanjem jednadžbe 2 dobije se da je : $\bar{I}_2 = 0,5 \cdot \bar{I}_1$.

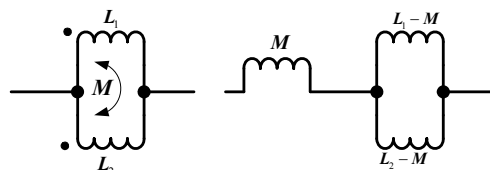
Uvrštenjem struje \bar{I}_2 u prvu jednadžbu dobije se: $\bar{U} = 4\bar{I}_1 + j1,5\bar{I}_1$;

Impedancija spoja iznosi: $Z = 4 + j1,5 \Omega$.

Ukupni induktivni otpor paralelno spojenih zavojnica čije je međuinduktivno djelovanje suglasno iznosi:

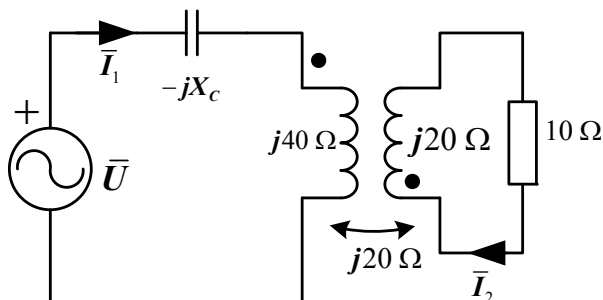
$$X_{uk} = \frac{X_1 \cdot X_2 - X_M^2}{X_1 + X_2 - 2X_M} = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 + 2 - 2 \cdot 1} = \frac{3}{2} = 1,5 \Omega$$

što slijedi iz ekvivalentne sheme za takav spoj (zapisi s predavanja)



$$X_u = X_M + \frac{(X_1 - X_M) \cdot (X_2 - X_M)}{X_1 + X_2 - 2X_M} = 1 + \frac{1 \cdot 1}{2} = 1,5 \Omega$$

164.) Treba odrediti vrijednost kapacitivnog otpora X_c , tako da dvopol na slici predstavlja čisti omski teret.



164.a) Rješenje:

Impedancija spoja je jednaka: $Z_{ulazna} = \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1}$

Jednadžbe petlji: $\bar{U}_1 = (-jX_c + j40) + j20 \cdot \bar{I}_2$

$$j20 \cdot \bar{I}_1 + (10 + j20) \cdot \bar{I}_2 = 0; \Rightarrow \bar{I}_2 = -\frac{j20}{10 + j10} \cdot \bar{I}_1$$

Vidljivo je da je struja \bar{I}_2 negativna što znači da je smjer te struje ustvari suprotan

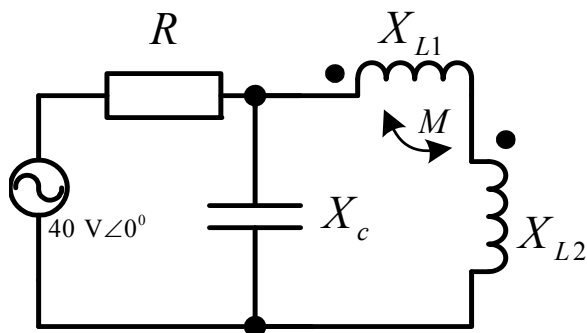
$$Z_{it} = \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1} = (-jX_c + j40) + \frac{400}{10 + j20} = 8 + j(24 - X_c)$$

Da bi dvopol predstavljao za izvor čisti omski teret mora biti:

$$24 - X_c = 0; \quad X_c = 24 \, \Omega.$$

165.) Potrebno je izračunati snagu otpornika R u spoju prema slici, ako je poznato:

$$R = 40 \, \Omega; \quad X_{L1} = 32 \, \Omega; \quad X_{L2} = 2 \, \Omega; \quad X_c = 20 \, \Omega; \quad k = 0,375.$$



165.a) Rješenje:

Najprije treba izračunati ukupni induktivni otpor suglasno spojenih zavojnica:

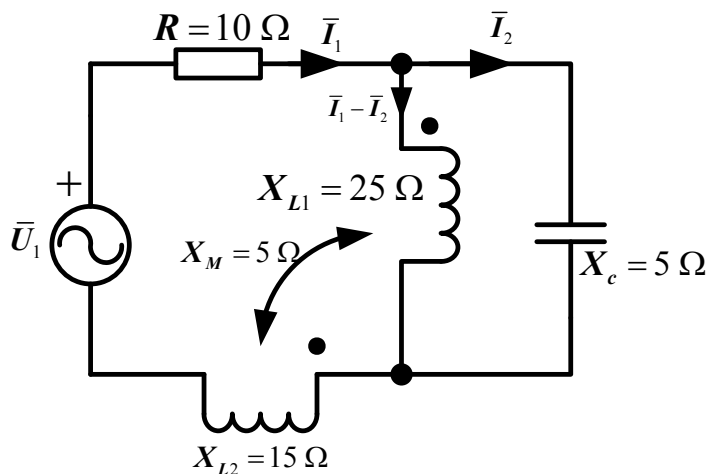
$$X_L = X_{L1} + X_{L2} + 2k\sqrt{X_{L1} \cdot X_{L2}} = 32 + 2 + 2 \cdot 0,375 \cdot \sqrt{64} = 40 \, \Omega$$

$$\text{Impedancija spoja iznosi: } Z = R + \frac{jX_L \cdot (-jX_c)}{jX_L - jX_c} = 40 - j40 \, \Omega$$

$$\text{Struja kroz otpornik je ukupna struja pa je: } I = \frac{40}{40 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \, \text{A}$$

$$\text{Snaga otpornika je: } P = I_L^2 \cdot R = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot 40 = 20 \, \text{W}$$

166.) Potrebno je izračunati ulaznu impedanciju spoja na slici.



166.a) Rješenje: Zapisati jednačbe petlji:

$$\bar{U} = \bar{I}_1 \cdot R + (\bar{I}_1 - \bar{I}_2) \cdot jX_{L1} + \bar{I} \cdot jX_M + \bar{I}_1 \cdot jX_{L2} + (\bar{I}_1 - \bar{I}_2) \cdot jX_M$$

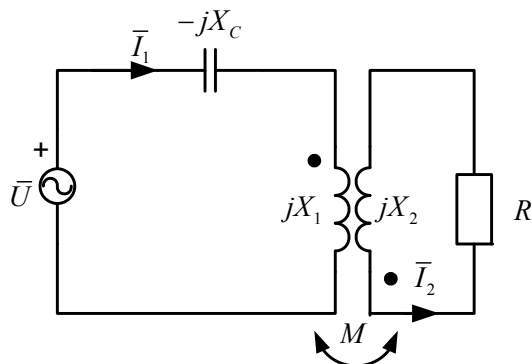
$$0 = \bar{I} \cdot (-jX_c) + (\bar{I}_2 - \bar{I}_1) \cdot jX_{L1} - \bar{I}_1 \cdot jX_M$$

Te dvije jednačbe daju rješenje: $\bar{U} = \bar{I}_1 \cdot (10 + j5)$, pa je ulazna impedancija

$$Z_u = \frac{\bar{U}}{\bar{I}_1} = 10 + j5 \quad \Omega$$

167.) U spoju prema slici treba odrediti iznos kapacitivnog otpora tako da dvopol predstavlja za izvor čisti omski teret.

Zapisati jednadžbe petlji:



167.a) Rješenje:

$$\bar{U} = \bar{I}_1 \cdot (-jX_C + jX_1) - \bar{I}_2 \cdot jX_M$$

$$\bar{I}_2 \cdot (R + jX_2) - \bar{I}_1 \cdot jX_M = 0$$

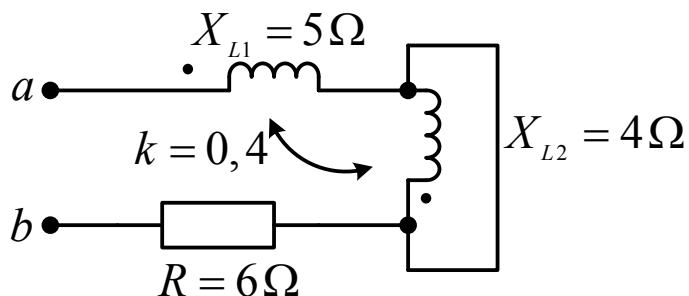
Izrazimo struju \bar{I}_1 i zapišemo impedanciju dvopola kao:

$$Z_{ul} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}_1} = (-jX_C + jX_1) + \frac{X_M^2 \cdot (R - jX_2)}{R^2 + X_2^2}$$

Da bi impedancija dvopola bila čista omska, mora imaginarni dio impedancije biti jednak nuli pa slijedi:

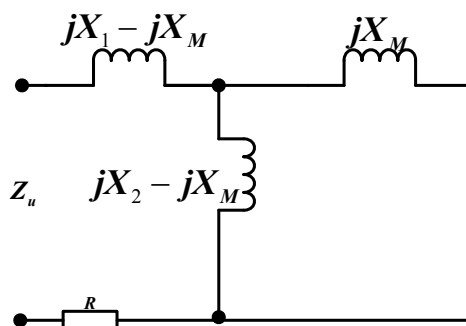
$$X_C = X_1 - \frac{X_M^2 \cdot X_2}{R^2 + X_2^2}$$

168.) Treba odrediti ulaznu impedanciju Z_u spoja na slici između stezaljki a i b koristeći ekvivalentnu shemu dotičnog spoja.



168.a) Rješenje:

Ekvivalentna shema:

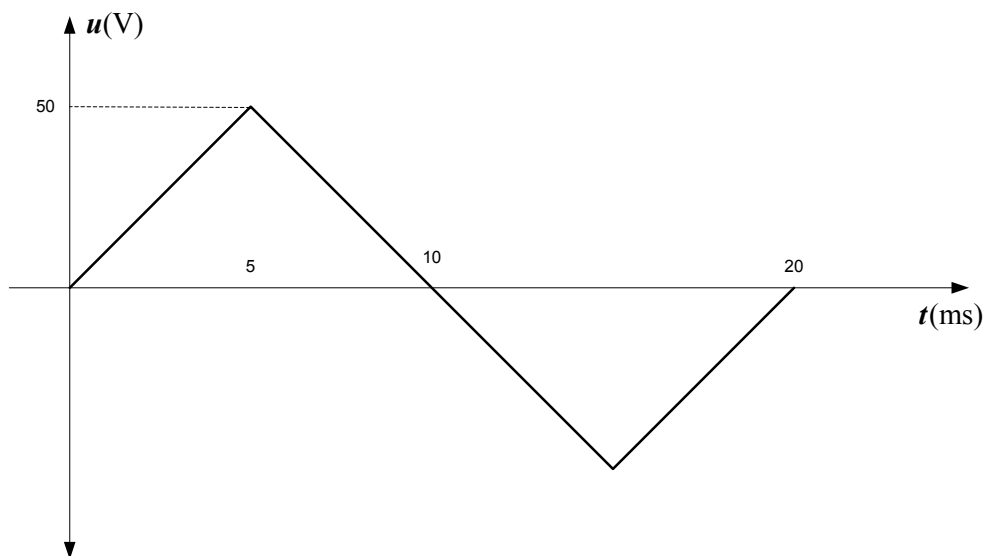


$$X_M = k\sqrt{X_1 \cdot X_2} = 1,788 \Omega$$

$$jX_1 - jX_M = 5 - 1,788 = 3,212 \Omega; \quad jX_2 - jX_M = 2,212 \Omega; \quad Z = 6 + j4,2 \Omega$$

NESINUSOIDALNE IZMJENIČNE VELIČINE

169.) Potrebno je izračunati jakost struje koja teče kroz kondenzator kapaciteta $C = 60 \mu\text{F}$ koji je priključen na izvor trokutastog napona, prema slici. Provjeriti rezultat uzimajući u obzir prvih 5 harmoničkih članova.



169.a) Rješenje: $i_c = C \cdot \frac{du_c}{dt}$; $u_c = \frac{50}{5 \cdot 10^{-3}} \cdot t = 10^4 \cdot t \quad (\text{V})$

$$i_c = 60 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 = 0,6 \text{ A}$$

Trokutasti napon se može zapisati kao:

$$u_c = \frac{8 \cdot U_{\square}}{\pi^2} \cdot (\sin \omega t - \frac{1}{9} \cdot \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \cdot \sin 5\omega t - \dots)$$

$$u_c = \frac{8 \cdot 50}{\pi^2} \cdot (\sin \omega t - \frac{1}{9} \cdot \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \cdot \sin 5\omega t - \dots)$$

$$u_c = 40,5 \cdot (\sin \omega t - \frac{1}{9} \cdot \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \cdot \sin 5\omega t - \dots)$$

Efektivna vrijednost osnovnog harmoničkog člana iznosi:

$$U_{1ef} = \frac{40,5}{\sqrt{2}} = 28,72;$$

Kapacitivni otpor za prvi harmonički član iznosi: (frekvencija osnovnog harmoničkog

člana je ista kao i trokutastog napona $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-3}} = 50 \text{ Hz}$)

$$X_{1c} = \frac{10^6}{314 \cdot 60} = 53,1 \text{ } \Omega$$

Struja koju rezultira osnovni harmonički član napona, iznosi:

$$I_1 = \frac{U_1}{X_{1c}} = \frac{28,7234}{53,1} = 0,5409 \text{ A}$$

Ostale vrijednosti su prikazane tabelarno.

Naravno da je efektivna vrijednost trećeg harmoničkog člana devet puta manja od osnovnog, ali je i kapacitivni otpor za trostruku frekvenciju tri puta manji pa je struja trećeg harmonika tri puta manja od struje prvog harmonika.

| n | U_n | X_{cn} | I_n | I_n^2 |
|---------|----------|-----------------|-------------|-------------|
| 1 | 28,7234 | 53,1 | 0,5409304 | 0,292605698 |
| 3 | 3,191489 | 17,7 | 0,180310133 | 0,032511744 |
| 5 | 1,148936 | 10,62 | 0,10818608 | 0,011704228 |
| 7 | 0,586192 | 7,585714 | 0,077275771 | 0,005971545 |
| 9 | 0,35461 | 5,9 | 0,060103378 | 0,003612416 |
| 11 | 0,237384 | 4,827273 | 0,049175491 | 0,002418229 |
| 13 | 0,169961 | 4,084615 | 0,041610031 | 0,001731395 |
| 15 | 0,12766 | 3,54 | 0,036062027 | 0,00130047 |
| 17 | 0,099389 | 3,123529 | 0,031819435 | 0,001012476 |
| 19 | 0,079566 | 2,794737 | 0,028470021 | 0,000810542 |
| 21 | 0,065132 | 2,528571 | 0,02575859 | 0,000663505 |
| 23 | 0,054298 | 2,308696 | 0,023518713 | 0,00055313 |
| 25 | 0,045957 | 2,124 | 0,021637216 | 0,000468169 |
| 27 | 0,039401 | 1,966667 | 0,020034459 | 0,00040138 |
| 29 | 0,034154 | 1,831034 | 0,018652772 | 0,000347926 |
| 31 | 0,029889 | 1,712903 | 0,017449368 | 0,00030448 |
| 33 | 0,026376 | 1,609091 | 0,01639183 | 0,000268692 |
| 35 | 0,023448 | 1,517143 | 0,015455154 | 0,000238862 |
| 37 | 0,020981 | 1,435135 | 0,014619741 | 0,000213737 |
| 39 | 0,018885 | 1,361538 | 0,01387001 | 0,000192377 |
| 41 | 0,017087 | 1,295122 | 0,013193424 | 0,000174066 |
| 43 | 0,015535 | 1,234884 | 0,012579777 | 0,000158251 |
| 45 | 0,014184 | 1,18 | 0,012020676 | 0,000144497 |
| 47 | 0,013003 | 1,129787 | 0,011509157 | 0,000132461 |
| 49 | 0,011963 | 1,083673 | 0,011039396 | 0,000121868 |
| 51 | 0,011043 | 1,041176 | 0,010606478 | 0,000112497 |
| I_n^2 | | 0,358175 | A^2 | |
| I_n | | 0,598477 | A | |

170.) Treba prikazati oblik napona prema jednadžbi a, uzimajući u obzir zaključno 13 harmonik.

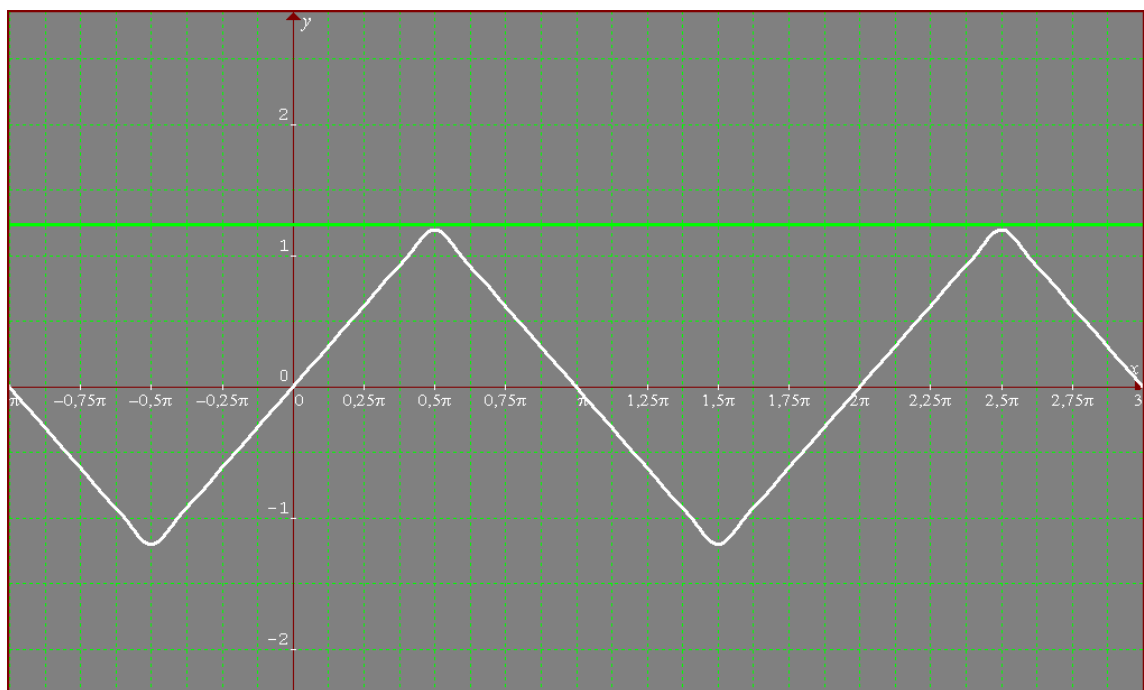
a.) $y = \sin(x) - \frac{1}{9} \sin(3x) + \frac{1}{25} \sin(5x) - \frac{1}{49} \sin(7x) + \frac{1}{81} \sin(9x) - \frac{1}{121} \sin(11x) + \frac{1}{169} \sin(13x)$

170.a) Rješenje:

$$u_c = \frac{8 \cdot U_{\square}}{\pi^2} \cdot \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \dots \right),$$

što znači da je amplituda trokutastog napona:

$$U_{\square} = \frac{\pi^2}{8} = 1,234 \text{ V}$$



171.) Serijski spoj RLC elemenata je priključen na izvor napajanja čiji napon sadrži treći harmonik u iznosu 5%. Koliki iznos struje teče spojem, ako je poznato:

$$U_1 = 400 \text{ V}; U_3 = 0,05 \cdot 400 = 20 \text{ V}; R = 1 \Omega; L = 0,1501 \text{ H}; C = 7,5 \mu\text{F}?$$

171.a) Rješenje: Budući da napon izvora nije sinusoidaln, već sadrži treći harmonik čija je efektivna vrijednost 20 V, ukupni napon prvog (osnovnog) i trećeg harmonika iznosi:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{400^2 + 20^2} = 400,499 \text{ (V)}$$

Jasno je da V-metrom ne možemo “otkriti” prisustvo trećeg harmonika, ali A-metar pokazuje struju koja upućuje na to prisustvo. Impedancije spoja se određuju prema izrazima:

Za prvi harmonik:

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(314 \cdot 0,1501 - \frac{1}{314 \cdot 7,5 \cdot 10^{-6}}\right)^2}$$

$$Z_1 = \sqrt{1 + (47,13 - 424,63)^2} = 377,5 \text{ (}\Omega\text{)}$$

Struja prvog harmonika iznosi: $I_1 = \frac{U_1}{Z_1} = \frac{400}{377,5} = 1,06 \text{ (A)}$

Za treći harmonik impedancija iznosi:

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + \left(3 \cdot \omega L - \frac{1}{3 \cdot \omega C}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(47,13 \cdot 3 - \frac{424,63}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + (141,39 - 141,54)^2} \approx 1 \text{ (}\Omega\text{)}$$

Struja koja teče zbog trećeg harmonika:

$$I_3 = \frac{U_3}{Z_3} = \frac{0,05 \cdot 400}{1} = 20 \text{ (A)}$$

Ukupna struja se određuje prema izrazu:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} \approx 20 \text{ (A)}$$

Ako u izvoru ne bi bio prisutan treći harmonik, tekla bi struja $\approx 1 \text{ (A)}$

172.) Kroz otpornik $R = 22\ \Omega$ teče vremenski promjenljiva struja $i = 0,5 + 0,5 \cdot \sin(\omega t)$. Kolika je srednja snaga otpornika?

172.a) Rješenje: Srednja snaga je djelatna snaga i na otporniku iznosi

$$P_R = I_{ef}^2 \cdot R$$

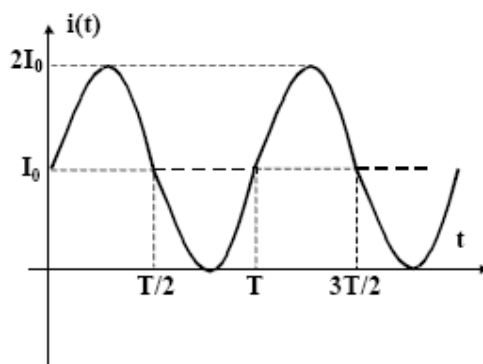
Efektivnu vrijednost odredimo prema

$$I_{ef} = \sqrt{I_o^2 + I_1^2} = \sqrt{0,5^2 + \left(\frac{0,5}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{0,75}{2}}$$

što znači da je

$$I_{ef}^2 = \frac{0,75}{2}, \text{ i } P_R = I_{ef}^2 \cdot R = \frac{0,75}{2} \cdot 22 = 8,25 \text{ W}$$

173.) Sinusoidna struja oblika prema slici, teče nekim strujnim krugom. Ampermetar uključen u strujni krug, pokazuje efektivnu vrijednost struje od 6 A . Kolika je amplituda struje I_o ?



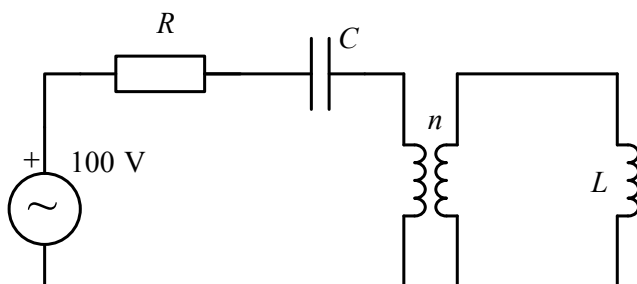
173.a) Rješenje:

$$I_{ef}^2 = I_0^2 + \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3 \cdot I_0^2}{2} = 6^2,$$

Iz toga slijedi da je $I_0^2 = 24\text{ A}^2$; $I_0 = 4,89\text{ A}$

IDEALNI TRANSFORMATOR

174.) Treba odrediti prijenosni omjer $n = \frac{N_1}{N_2}$ idealnog transformatora, potreban da se u krugu na slici pri frekvenciji $\omega = 1000 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$ postigne struja primara od 0,1 A ako je zadano: $U = 100 \text{ V}$; $R = 1 \text{ k}\Omega$; $C = 1 \text{ nF}$; $L = 0,1 \text{ H}$.



174.a) Rješenje:

Najprije treba izračunati iznose induktivnog i kapacitivnog otpora.

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^9}{10^3} = 10^6 \Omega; \quad X_L = \omega L = 1000 \cdot 0,1 = 100 \Omega.$$

Reducirani na primar, induktivni otpor iznosi:

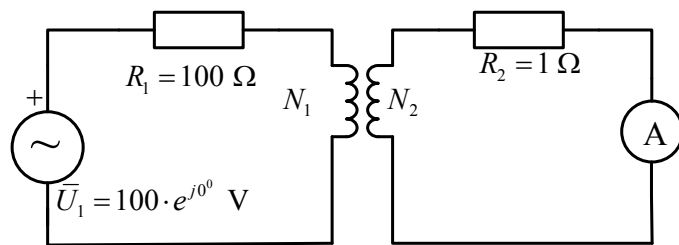
$$X'_L = n^2 \cdot X_L,$$

pa je ukupna impedancija spoja $Z = R + j(n^2 \cdot X_L - X_c)$.

Kako je $Z = \frac{U}{I} = \frac{100}{0,1} = 1000 \Omega$, mora biti da je $n^2 \cdot X_L - X_c = 0$ pa je

$$n = \sqrt{\frac{X_c}{X_L}} = \sqrt{\frac{10^6}{10^2}} = 100$$

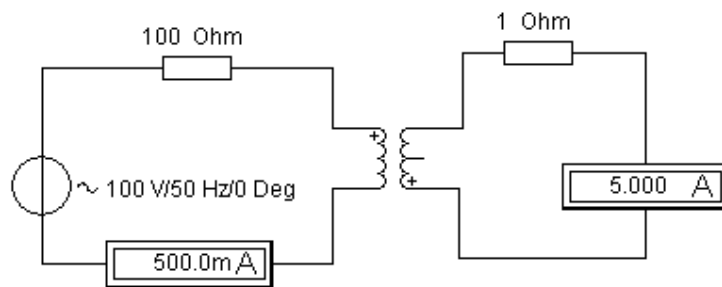
175.) Potrebno je izračunati pokazivanje A-metra u spoju na slici ako je $\frac{N_1}{N_2} = 10$



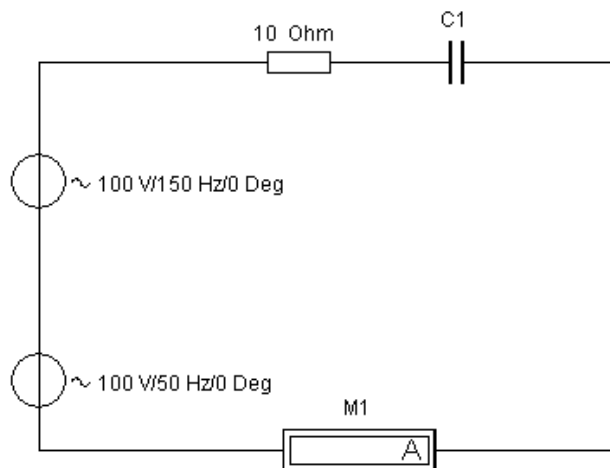
175.a) Rješenje:

Kroz primar i sekundar teku struje:

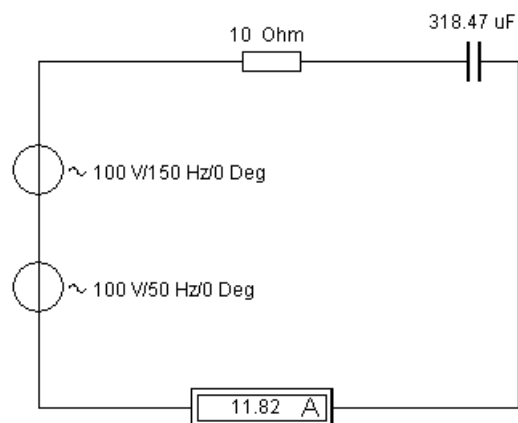
$$\bar{I}_1 = \frac{U}{R_1 + R_2'} = \frac{100}{100 + 10^2 \cdot 1} = 0,5 \text{ A}; \quad I_2 = n \cdot I_1 = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ A}$$



176.) Potrebno je izračunati efektivnu vrijednost struje u spoju na slici ako je $X_c(50\text{Hz})=10\ \Omega$



176.a) Rješenje: Simulacija u EWB-u



Ako bi u spoju na slici djelovao samo izvor s frekvencijom 50 Hz, spojem bi tekla struja

čiji je efektivni iznos: $I_{ef1} = \frac{U_{ef1}}{Z_1}$ pri čemu je

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + X_c^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}\ \Omega, \quad \text{pa je} \quad I_{ef1} = \frac{100}{10\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}}\ \text{A}.$$

Ako bi u spoju djelovao samo izvor s frekvencijom 150 Hz, spojem bi tekla efektivna vrijednost struje prema:

$$I_{ef3} = \frac{U_3}{Z_3} = \frac{100}{\sqrt{10^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2}} = \frac{100}{\sqrt{100 + \frac{100}{9}}} = \frac{100}{\frac{10 \cdot \sqrt{10}}{3}} = \frac{300}{10\sqrt{10}} = \frac{30}{\sqrt{10}}$$

$$\text{Ukupna struja je jednaka: } I_{ef} = \sqrt{I_{ef1}^2 + I_{ef3}^2} = \sqrt{\frac{100}{2} + \frac{900}{10}} = \sqrt{140} = 11,83\ \text{A}$$

177.) Jednofazni transformator s $S_2 = 200 \text{ kVA}$ ima gubitke praznog hoda $P_0 = 1600 \text{ W}$ i gubitke kratkog spoja $P_k = 2200 \text{ W}$. Koliki je koeficijent korisnosti kod 25% opterećenja i $\cos \varphi_2 = 0,7$?

177.a) Rješenje:

Izraz za koeficijent korisnosti je:

$$\eta = \frac{k \cdot S_2 \cdot \cos \varphi_2}{k \cdot S_2 \cdot \cos \varphi_2 + k^2 \cdot P_k + P_0} = \frac{35}{35 + 0,1375 + 1,6} = 0,9527$$

178.) Transformator nominalne snage $S = 25 \text{ kVA}$ napona $U = 500 \text{ V}$ napaja trošilo snage $P_t = 12 \text{ kW}$, $\cos \varphi_p = 0,6$. U svrhu potpunog opterećenja transformatora paralelno trošilu spaja se otpornik R. Odredite iznos otpora tog otpornika i novi $\cos \varphi$.

178.a) Rješenje:

Trošilo ima prividnu snagu:

$$S_t = 12 + j \cdot 12 \cdot \tan \varphi_p = 12 + j12 \cdot 1,333 = 12 + j16 \text{ kVA},$$

pa u svrhu potpunog opterećenja mora biti zadovoljena jednakost:

$$25^2 = (12 + P_R)^2 + 16^2,$$

$$\text{i dalje } 12 + P_R = 19,21; \quad P_R = 7,21 \text{ kW},$$

što znači da iznos otpora priključenog otpornika mora biti

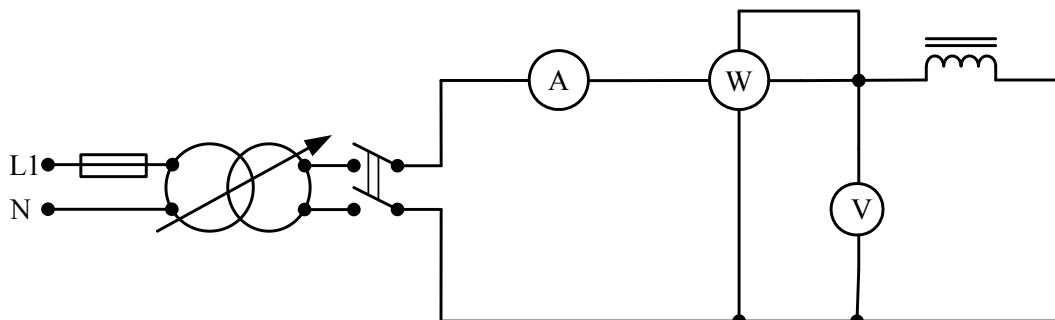
$$R = \frac{U^2}{P_R} = \frac{500^2}{7210} = 34,674 \, \Omega.$$

Novi faktor snage sada iznosi:

$$\cos \varphi = \frac{P_u}{S} = \frac{19210}{25000} = 0,7684$$

SVITAK S FEROMAGNETSKOM JEZGROM, TRANSFORMATOR S FEROMAGNETSKOM JEZGROM

179.) Treba odrediti gubitke u feromagnetskoj jezgri svitka, ako instrumenti pokazuju slijedeće vrijednosti: $U_v = 220 \text{ V}$; $I_A = 1,5 \text{ A}$; $P_w = 44 \text{ W}$. Ukupni otpor zavoja svitka je $R_u = 0,8 \Omega$



179.a) Rješenje:

W-metar je izmjerio ukupne gubitke koji se sastoje od gubitaka u jezgri i namotu pa je

$$P_{Fe} = P_w - I_A^2 \cdot R = 44 - 1,5^2 \cdot 0,8 = 42,2 \text{ W}.$$

180.) U željeznoj jezgri prigušnice, gubici zbog histereze iznose $P_{h1} = 100 \text{ W}$ pri izmjeničnom naponu $U_1 = 110 \text{ V}$ i frekvenciji $f_1 = 40 \text{ Hz}$? Koliki će biti gubici histereze P_{h2} ako se uz nepromjenjeni napon frekvencija podigne na $f_2 = 80 \text{ Hz}$? Otpor zavoja je zanemariv.

180.a) Rješenje:

Gubici zbog histereze ovise o kvadratu magnetske indukcije (B^2) i prvoj potenciji frekvencije f . (gubici zbog vrtložnih struja ovise o B^2 i f^2).

Ako se frekvencija poveća sa 40Hz na 80 Hz, onda se u skladu s $E = 4,44 \cdot \Phi_m \cdot f \cdot N$ ($U \approx E$ zbog zanemarenja otpora namota) magnetski tok, a time i magnetska indukcija ($B_m = \frac{\Phi_m}{S}$) smanje u istom omjeru. Zato su novi gubici histereze jednaki:

$$P_{h2} = P_{h1} \cdot \left(\frac{f_2}{f_1}\right) \cdot \left(\frac{B_2}{B_1}\right)^2 = 100 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 50 \text{ W}$$

181.) Za svitak s feromagnetskom jezgrom mjerenjem su dobivene vrijednosti:

$U = 220 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $I = 10 \text{ A}$, $P = 400 \text{ W}$. **Ako je poznato da je $P_{Fe} = 3P_{Cu}$, treba odrediti parametre nadomjesne sheme svitka R_{Cu} , R_{Fe} , X_{Fe} , I_g , I_μ . Rasipanje je zanemarivo.**

181.a) Rješenje:

Ukupni gubici $P = P_{Fe} + P_{Cu} = 3P_{Cu} + P_{Cu} = 4P_{Cu}$ pa je $P_{Cu} = \frac{P}{4} = 100 \text{ W}$.

Otpor namota je $R_{Cu} = \frac{P_{Cu}}{I^2} = \frac{100}{10^2} = 1 \Omega$.

Ukupni gubici u željezu su $P_{Fe} = P - P_{Cu} = 400 - 100 = 300 \text{ W}$.

Faktor snage iznosi $\cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{400}{220 \cdot 10} = 0,182$

$E = U - I \cdot (0,182 + j0,983) \cdot 1 = 220 - 1,82 - j9,83 = 218,18 - j9,83 \text{ A}$.

Apsolutni iznos EMS je $E = 218,4 \text{ V}$.

Nadomjesni otpor $R_{Fe} = \frac{E^2}{P_{Fe}} = \frac{218,4^2}{300} = 159 \Omega$.

Struja $I_g = \frac{E}{R_{Fe}} = \frac{218,4}{159} = 1,374 \text{ A}$.

Struja $I_\mu = \sqrt{10^2 - 1,374^2} = 9,905 \text{ A}$ pa je $X_{Fe} = \frac{E}{I_\mu} = \frac{218,4}{9,905} = 22,05 \Omega$

182.) Kod nominalnih uvjeta transformator ima gubitke u željezu P_{Fe} i gubitke u bakru P_{Cu} . Napon na primaru se smanji na $0,5U_n$, a istovremeno se zamijeni trošilo tako da struja primara i sekundara ostanu nepromijenjene. Koliki će u tim uvjetima biti gubitci u bakru i željezu P'_{Cu} i P'_{Fe} ?

182.a) Rješenje:

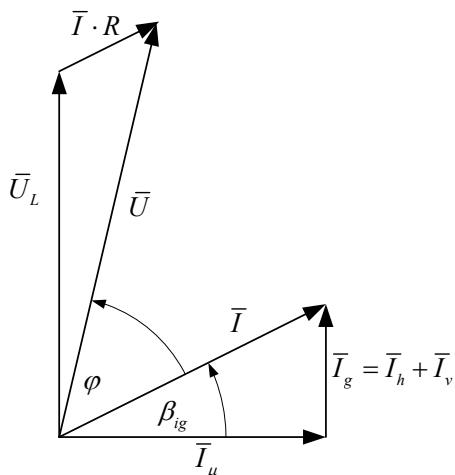
Ako se smanji napon primara na $0,5U_n$ prema relaciji $U_1 \approx E_1 = 4,44 \cdot \Phi_m \cdot f \cdot N_1$, slijedi da će se smanjiti magnetski tok na polovicu iznosa, a prema tome i magnetska indukcija $B'_m = 0,5B_m$. Gubitci u željezu se dijele na gubitke zbog vrtložnih struja i mijenjaju se s kvadratom indukcije i frekvencije. Gubitci zbog histereze mijenjaju se s kvadratom indukcije i prvom potencijom frekvencije. Zato vrijedi da će novi gubitci zbog vrtložnih

struja biti $P'_v = P_v \cdot \frac{(0,5B_m)^2}{B_m^2} = 0,25P_v$. Isto tako novi gubitci zbog histereze struja će

iznositi: $P'_v = P_v \cdot \frac{(0,5B_m)^2}{B_m^2} = 0,25P_v$. Kako su gubitci u željezu jednaki

$P_{Fe} = P_v + P_h$ i $P'_{Fe} = P'_v + P'_h$ slijedi da je $P'_{Fe} = 0,25 \cdot P_{Fe}$. Gubitci u bakru su ostali isti $P'_{Cu} = P_{Cu}$.

183.) Na svitku s feromagnetskom jezgrom izmjerene su sljedeće vrijednosti: $P = 200 \text{ W}$, $I = 4 \text{ A}$. Svitak je priključen na napon $U = 220 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$. Rasipanje toka je zanemarivo. Ako otpor svitka iznosi $R_{Cu} = 5 \Omega$, treba izračunati nadomjesni otpor željeza R_g .



183.a) Rješenje:

Djelatna snaga zavojnice iznosi:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

Pa se iz poznatih podataka može odrediti faktor snage:

$$\cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{200}{220 \cdot 4} = 0,2273$$

Napon samoindukcije iznosi $\bar{U}_L = U - \bar{I} \cdot R$.

Napon izvora se postavlja u realnu os $\bar{U} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$,

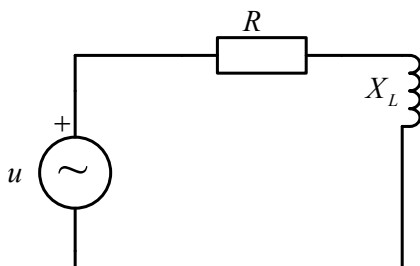
onda je struja $\bar{I} = 4 \cdot (\cos \varphi - j \sin \varphi) = 0,9092 - j3,895 \text{ V}$ pa je:

$$\begin{aligned} \bar{U}_L &= 220 - (0,9092 \cdot 5 - j3,895 \cdot 5) = 220 - 4,546 + j19,475 \text{ V} = \\ &= 215,454 + j19,475 = 216,3324 \text{ V} \end{aligned}$$

Gubitci u jezgri iznose $P_{Fe} = P - P_{Cu} = 200 - 4^2 \cdot 5 = 200 - 80 = 120 \text{ W}$.

$$\text{Nadomjesni otpor željeza iznosi: } R_g = \frac{U_L^2}{P_{Fe}} = \frac{216,3324^2}{120} = 390 \Omega$$

184.) Naponski izvor $u = 2,5 + 25 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(3000t + 45^\circ)$ V **priključen je na serijski spoj otpornika** $R = 10 \, \Omega$ **i zavojnice** $L = 10 \, \text{mH}$. **Potrebno je izračunati efektivni iznos struje koju daje izvor.**



184.a) Rješenje:

Zadani napon se sastoji od istosmjernje komponente $U_0 = 2,5 \, \text{V}$ i izmjenične sinusoidalne komponente efektivne vrijednosti $U_{ef} = 25 \, \text{V}$.

Ako bi djelovala samo istosmjerna komponenta zadanog napona, spojem bi tekla struja iznosa $I_0 = \frac{2,5}{10} = 0,25 \, \text{A}$. (induktivni otpor za istosmjernu struju je 0).

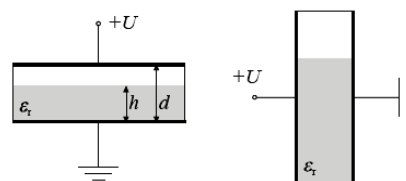
Ako bi u spoju djelovala samo izmjenična komponenta, spojem bi tekla struja efektivnog iznosa $I_{ef} = \frac{25}{\sqrt{10^2 + 30^2}} = 0,79 \, \text{A}$ jer je za izmjeničnu komponentu

impedancija spoja $Z = \sqrt{10^2 + (3000 \cdot 10 \cdot 10^{-3})^2} = \sqrt{10^2 + 30^2} = 31,623 \, \Omega$.

Ukupna struja spoja je: $I_{uef} = \sqrt{I_0^2 + I_{ef}^2} = \sqrt{0,25^2 + 0,79^2} = 0,83 \, \text{A}$

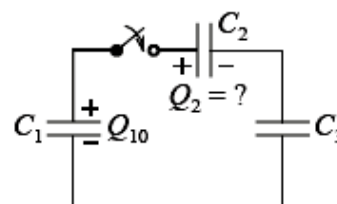
PRIMJER PISMENOG ISPITA 1

1.) U izolacijsku posudu s kovinskim dnom i stropom na slici je do $h = \frac{2}{3} \cdot d$ nalito ulje relativne dielektričnosti $\epsilon_r = 10$. Za koliko posto se promijeni jakost električnog polja u zraku, ako se posuda zaokrene za 90° ?



$$\frac{E_{zr2} - E_{zr1}}{E_{zr1}} \cdot 100 = \underline{\hspace{2cm}}$$

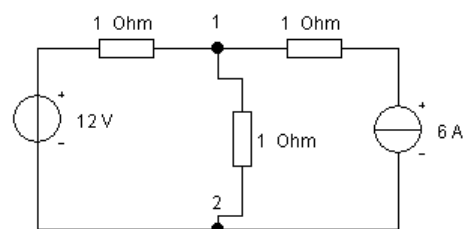
2.) Prije zatvaranja sklopke u spoju (na slici) kondenzator $C_1 = 3 \mu\text{F}$ nabijen je nabojem $Q_{10} = 120 \mu\text{C}$. Kondenzatori $C_2 = 3 \mu\text{F}$ i $C_3 = 1,5 \mu\text{F}$ su pritom bili prazni. Treba odrediti naboj Q_2 nakon zatvaranja sklopke.



$$Q_2 = \underline{\hspace{2cm}} \mu\text{C}$$

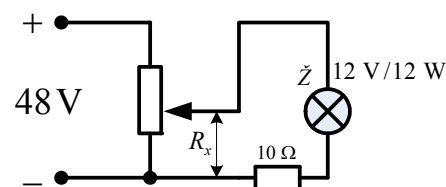
3.) Kolika je snaga strujnog izvora u spoju na slici?

$$P_I = \underline{\hspace{2cm}} \text{ W}$$



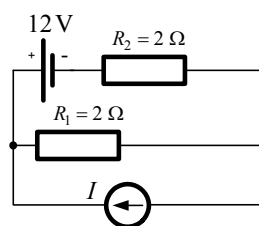
4.) Koliko mora iznositi otpor R_x donjeg dijela potencimetra na slici čiji je ukupni otpor 100Ω da bi žaruljica bila pravilno napajana ($U_n = 12 \text{ V}$; $P_n = 12 \text{ W}$)

$$R_x = \underline{\hspace{2cm}} \Omega ?$$



5.) Pri kojim strujama strujnog izvora će snaga P_{R_1} biti 4 puta veća od snage P_{R_2}

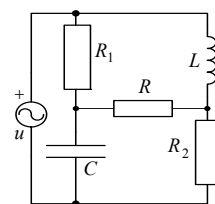
$$I' = \underline{\hspace{2cm}} \text{ A}; \quad I'' = \underline{\hspace{2cm}} \text{ A}.$$



PRIMJER PISMENOG ISPITA 2

1.) Treba odrediti iznos otpora otpornika R u spoju na slici, tako da se u njemu pojavi maksimalna snaga ako je poznato.
 $\omega = 5 \text{ kHz}$; $C = 10 \text{ } \mu\text{F}$; $L = 2 \text{ mH}$; $R_1 = R_2 = 10 \text{ } \Omega$.

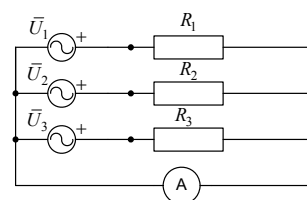
$R = \text{ } \Omega$



2. Potrebno je izračunati R_1, R_2 i R_3 u spoju na slici koji je priključen na trofazni simetrični direktni sustav faznog napona $U_f = 220 \text{ V}$ ako je:

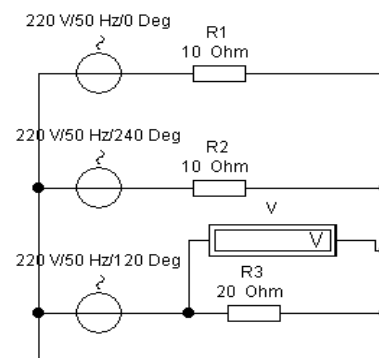
$R_1 = R_2 = R$; $R_3 = 2R$, a pokazivanje A-metra je 5 A .

$R_1 = \text{ } \Omega$; $R_2 = \text{ } \Omega$; $R_3 = \text{ } \Omega$



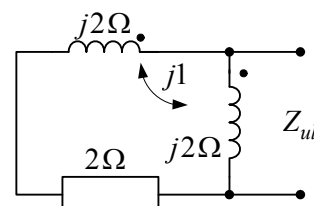
3.) Za koliko se promijeni pokazivanje V-metra u spoju prema slici, ako se 0-vod prekine?

$\Delta U_v = \text{ } \text{V}$



4.) Potrebno je izračunati ulaznu impedanciju spoja prema slici:

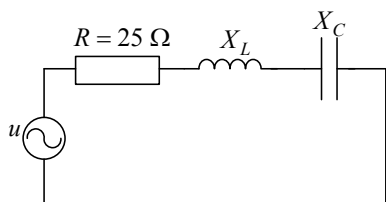
$Z_{ul} = \text{ } \Omega$



5.) U mreži na slici pri kružnoj frekvenciji ω induktivni otpor iznosi

$X_L = 20 \text{ } \Omega$; $X_C = 32 \text{ } \Omega$. Treba odrediti efektivnu vrijednost struje izvora

$u = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 15^\circ) + 15\sqrt{2} \sin(2\omega t + 30^\circ) + 50\sqrt{2} \sin(8\omega t - 45^\circ)$



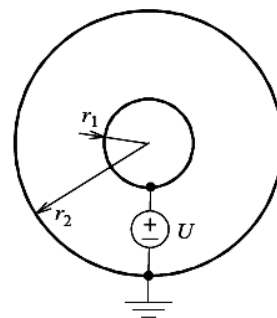
$I = \text{ } \text{A}$.

PRIMJER PISMENOG ISPITA 3

1.) Zračni vod čine dva paralelna vodiča polumjera $r=3$ mm i međusobne udaljenosti $d=40$ cm koji su priključeni na napon U . Potrebno je izračunati iznos napona ako je jakost električnog polja na površini vodiča jednaka $\vec{E} = 8,52 \cdot \vec{i} \frac{\text{kV}}{\text{m}}$. (Ekscentricitet zanemariti i uzeti u obzir da je $d \gg r$)

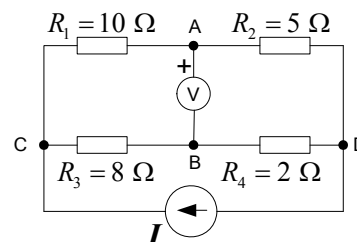
$$U = \underline{\hspace{2cm}} \text{ V.}$$

2.) Potrebno je izračunati najmanji i najveći iznos jakosti električnog polja između sfera koncentričnih vodljivih kugla, ako je poznato: $r_1 = 10$ mm; $r_2 = 25$ mm; $\varepsilon_r = 1$; $U = 100$ V. Koliki je omjer tih jakosti električnog polja?



$$E_1 = \underline{\hspace{2cm}} \left(\frac{\text{kV}}{\text{m}} \right); \quad E_2 = \underline{\hspace{2cm}} \left(\frac{\text{kV}}{\text{m}} \right); \quad \frac{E_2}{E_1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

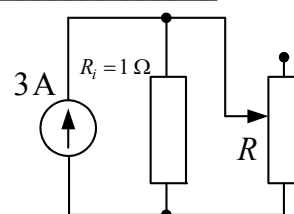
3.) Idealni V-metar u spoju na slici pokazuje 12 V. Potrebno je izračunati struju i snagu strujnog izvora.



$$I = \underline{\hspace{2cm}} \text{ A}; \quad P_I = \underline{\hspace{2cm}} \text{ W}$$

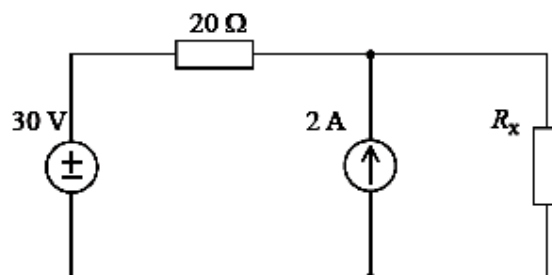
4.) Koliki moraju biti otpori promjenljivog otpornika R u spoju na slici da se na njemu pojavi 50% najveće moguće snage?

$$R' = \underline{\hspace{2cm}} \Omega; \quad R'' = \underline{\hspace{2cm}} \Omega$$



5.) Treba odrediti iznos otpora otpornika R_x tako da se na njemu pojavi napon 20 V.

$$R_x = \underline{\hspace{2cm}} \Omega$$

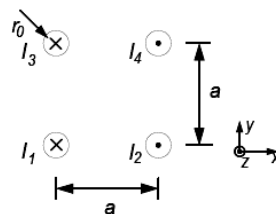


PRIMJER PISMENOG ISPITA 4

1.) Zapisati vektor magnetske sile koja djeluje na jedinicu dužine vodiča kojim teče struja I_4 ako je poznato:

$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = 30 \text{ A}$; $a = 1 \text{ cm}$; $r_0 = 1 \text{ mm}$
(Vodiči su jako dugi, ravni i međusobno paralelni.)

$$\vec{F}_4 = \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

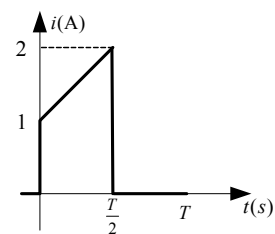


2.) U trenutku $t = 0$ priključuje se serijski RC spoj na idealni izvor istosmjernog napona s $E = 50 \text{ V}$, pri čemu je $u_c(0) = 20 \text{ V}$. Potrebno je izračunati vrijeme t u kojem napon na kondenzatoru poprimi iznos $u_c(t) = 24 \text{ V}$ ako je poznato $R = 1 \text{ M}\Omega$; $C = 1 \mu\text{F}$.

$$t = \text{_____ s}$$

3.) Potrebno je izračunati snagu otpornika od 5Ω kroz kojeg prolazi struja čija je vremenska promjena prikazana na slici.

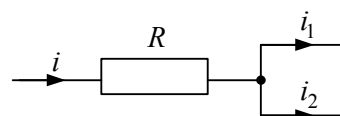
$$P_R = \text{_____ W}$$



Sl. 1

4.) Potrebno je izračunati snagu otpornika $R = 10 \Omega$ u spoju na slici ako je poznato:

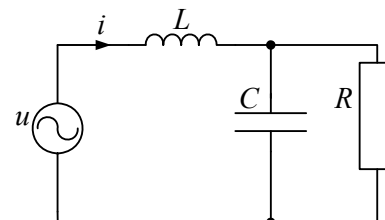
$$i_1 = \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 45^\circ); \quad i_2 = \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t - 30^\circ)$$



$$P_R = \text{_____ W}$$

5.) Pri kojoj frekvenciji u spoju na slici će napon i struja izvora biti u fazi, ako je poznato: $L = 1 \text{ mH}$; $C = 1 \text{ nF}$; $R = 2 \text{ k}\Omega$

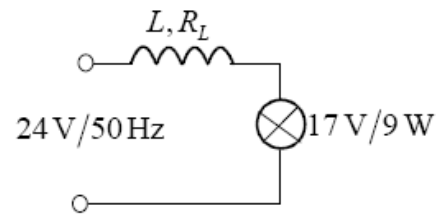
$$f = \text{_____ kHz ?}$$



PRIMJER PISMENOG ISPITA 5

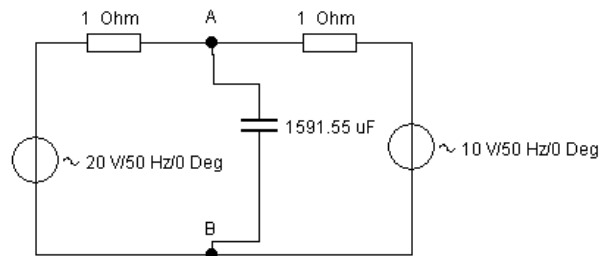
1.) Serijski s žaruljicom je priključena zavojnica induktiviteta L i omskog otpora $R_L = 2 \Omega$. Koliki mora biti induktivitet zavojnice da napon i snaga žaruljice budu jednaki nazivnim vrijednostima?

$$L = \text{_____} \text{ mH}$$



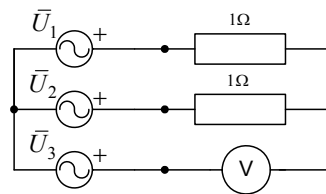
2.) Potrebno je izračunati apsolutni iznos napona \bar{U}_{AB} u mreži na slici.

$$U_{AB} = \text{_____} \text{ V}$$



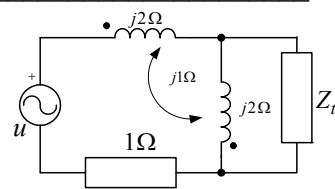
3.) Spoj na slici je napajan trofaznim simetričnim direktnim sustavom faznog napona 220 V. Potrebno je izračunati pokazivanje idealnog V-metra.

$$U_V = \text{_____} \text{ V}$$



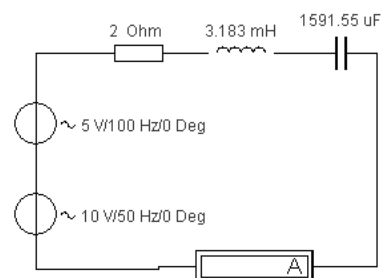
4.) Pri kojoj kompleksnoj vrijednosti impedancije Z_t u spoju na slici će snaga na njoj biti maksimalna?

$$Z_t = \text{_____} \Omega$$



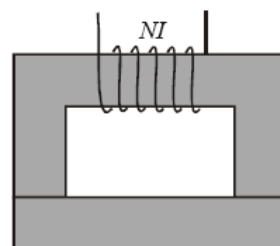
5.) Potrebno je izračunati efektivnu vrijednost struje u spoju na slici

$$I_{ef} = \text{_____} \text{ A}$$



PRIMJER PISMENOG ISPITA 6

1.) Elektromagnet čini jezgra i kotva iz materijala s $\mu = 9800\mu_0$, ukupne dužine magnetskog kruga 50 cm i presjeka jezgre 10 cm^2 . Treba odrediti struju u namotu s 100 zavoja pri kojoj će sila između jezgre i kotve biti 30 N.

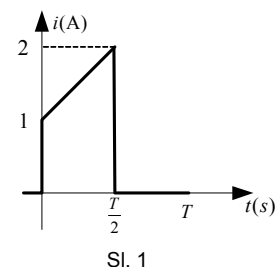


$I = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mA}$

2.) U trenutku $t = 0$ priključuje se serijski RC spoj na idealni izvor istosmjernog napona s $E = 50 \text{ V}$, pri čemu je $u_c(0) = 20 \text{ V}$. Potrebno je izračunati vrijeme t u kojem napon na kondenzatoru poprimi iznos $u_c(t) = 24 \text{ V}$ ako je poznato $R = 1 \text{ M}\Omega$; $C = 1 \mu\text{F}$.

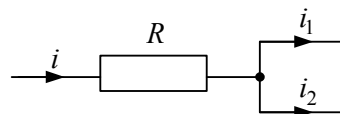
$t = \underline{\hspace{2cm}} \text{ s.}$

3.) Potrebno je izračunati snagu otpornika od 5Ω kroz kojeg prolazi struja čija je vremenska promjena prikazana na slici.



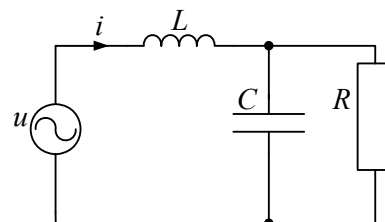
$P_R = \underline{\hspace{2cm}} \text{ W}$

4.) Potrebno je izračunati snagu otpornika $R = 5 \Omega$ u spoju na slici ako je poznato:
 $i_1 = \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 45^\circ)$; $i_2 = \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 30^\circ)$



$P_R = \underline{\hspace{2cm}} \text{ W}$

5.) Pri kojoj frekvenciji u spoju na slici će napon i struja izvora biti u fazi, ako je poznato: $L = 2 \text{ mH}$; $C = 1 \text{ nF}$; $R = 2 \text{ k}\Omega$

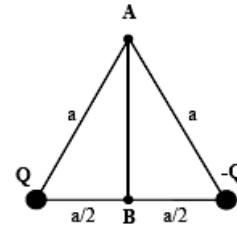


$f = \underline{\hspace{2cm}} \text{ kHz ?}$

PRIMJER PISMENOG ISPITA 7

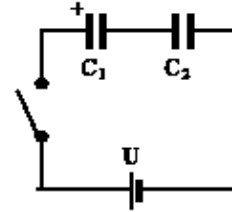
1.) Treba odrediti omjer apsolutnih iznosa jakosti električnih polja u točkama A i B prema slici .

$$\frac{E_A}{E_B} = \underline{\hspace{2cm}}$$



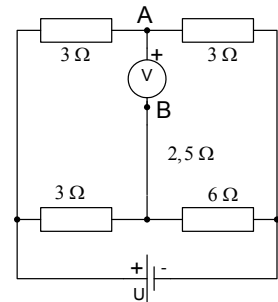
2.) Prije zatvaranja sklopke kondenzator $C_2 = 6 \mu\text{F}$ je nenabijen, a kondenzator $C_1 = 3 \mu\text{F}$ je nabijen na napon naznačenog polariteta, tako da ima energiju $W_{C1} = 0,6 \text{ mJ}$. Koliki će biti napon U_2 na kondenzatoru C_2 nakon zatvaranja sklopke, ako je napon izvora $U = 100 \text{ V}$?

$$U_2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ V}$$



3.) Idealni V-metar je s + stezaljkom spojen u točku A, a s minus stezaljkom u točku B u spoju na slici te pokazuje -6 V . Kolika je snaga idealnog naponskog izvora koji napaja taj spoj?

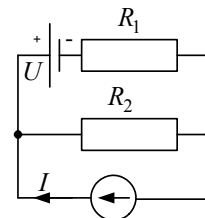
$$P_{izv} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ W}$$



4.) Pri kojoj struji I naznačenog smjera su snage na otpornicima R_1 i R_2 u spoju na slici međusobno jednake?. Koliko iznosi ta snaga?

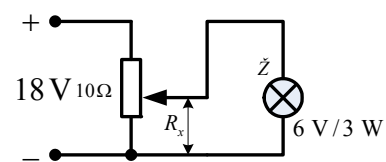
Poznato je: $R_1 = 1 \Omega$; $R_2 = 2 \Omega$; $U = 9 \text{ V}$

$$I = \underline{\hspace{2cm}} \text{ A}; \quad P = \underline{\hspace{2cm}} \text{ W}$$



5.) U kojem položaju klizača ($R_x = ?$) linearnog potencijometra ukupnog otpora 10Ω žaruljica će u spoju na slici biti pravilno napajana (s nazivnim vrijednostima).

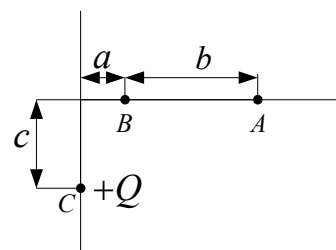
$$R_x = \underline{\hspace{2cm}} \Omega;$$



PRIMJER PISMENOG ISPITA 8

1.) Točkasti naboj $Q = 40 \text{ pC}$ nalazi se u točki C kao što prikazuje slika. Treba odrediti napon U_{AB} između točaka A i B ako je zadano: $a = 1 \text{ m}$; $b = 4 \text{ m}$; $c = 2 \text{ m}$.

Koliko puta je jakost električnog polja u točki B veća od jakosti električnog polja u točki A?



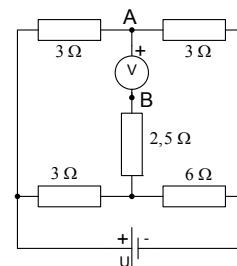
$$U_{AB} = \text{_____ mV}$$

$$\frac{E_B}{E_A} = \text{_____}$$

2.) Kondenzator kapaciteta $C_1 = 2 \text{ }\mu\text{F}$ se nabije na napon 110 V . Isključivši C_1 s izvora, na njega se priključi prazan kondenzator nepoznata kapaciteta C_2 koji se pritom nabije na napon 44 V . Koliki je iznos C_2 ?

$$C_2 = \text{_____ }\mu\text{F}$$

3.) Idealni V-metar je s + stezaljkom spojen u točku A, a s minus stezaljkom u točku B u spoju na slici te pokazuje -3 V . Kolika je snaga idealnog naponskog izvora koji napaja taj spoj?

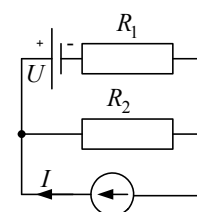


$$P_{izv} = \text{_____ W}$$

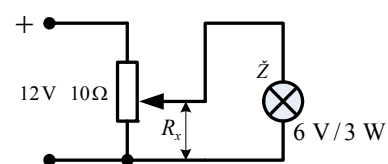
4.) Pri kojoj struji I naznačenog smjera su snage na otpornicima R_1 i R_2 u spoju na slici međusobno jednake? Koliko iznosi ta snaga?

Poznato je: $R_1 = 1 \text{ }\Omega$; $R_2 = 2 \text{ }\Omega$; $U = 9 \text{ V}$

$$I = \text{_____ A}; \quad P = \text{_____ W}$$



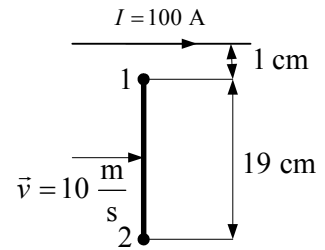
5.) U kojem položaju klizača ($R_x = ?$) linearnog potencijometra ukupnog otpora $10 \text{ }\Omega$ će žaruljica u spoju na slici biti pravilno napajana (s nazivnim vrijednostima)? Za koliku snagu mora biti dimenzioniran potencijometar?



$$R_x = \text{_____ }\Omega; \quad P_{pot} = \text{_____ W}$$

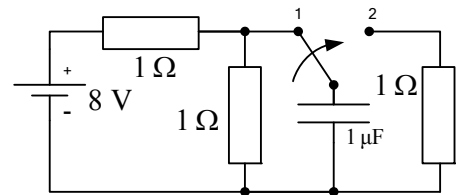
PRIMJER PISMENOG ISPITA 9

1.) Potrebno je izračunati iznos EMS inducirane u vodljivom štapu koji se giba u magnetskom polju ravnog jako dugog vodiča na način kako prikazuje slika. Štap i vodič su u istoj ravnini. Označiti i polaritete točaka 1 i 2.



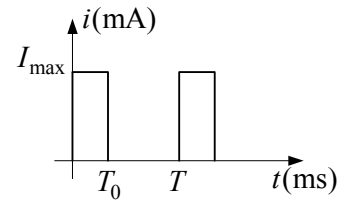
$$E = \text{____} \mu\text{V}$$

2.) U trenutku $t = 0$ se preklopi preklopka u spoju na slici u položaj 2. Treba odrediti iznos napona na kondenzatoru nakon $2 \mu\text{s}$ po preklapanju preklopke.



$$u_c = \text{____} \text{ V}$$

3.) Pri stimulaciji tkiva upotrijebljen je pravokutni signal s periodom $T = 1 \text{ ms}$ (slika). Treba odrediti najveću moguću širinu signala T_0 , ako efektivna vrijednost struje kroz tkivo ne smije prijeći 50% amplitude struje I_{max} .

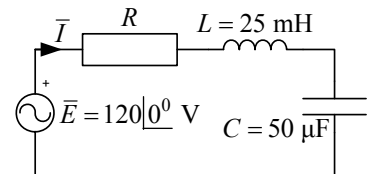


$$T_0 = \text{____} \mu\text{s}$$

4.) Zadane su struje $i_1 = 14,14 \cdot \sin(\omega t + 45^\circ)$, $i_2 = 14,14 \cdot \sin(\omega t - 75^\circ)$, $i_3 = 14,14 \cdot \sin(\omega t - 195^\circ)$, koje ulaze u zajednički čvor. Kolika je efektivna vrijednost struje I koja izlazi iz tog čvora?

$$I = \text{____} \text{ A}$$

5.) U spoju na slici kod frekvencije $\omega = 400 \text{ rad/s}$, struja prethodi EMS za kut $63,4^\circ$. Kolika je snaga otpornika R?

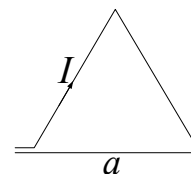


$$P_R = \text{____} \text{ W}$$

PRIMJER PISMENOG ISPITA 10

1.) U težištu istostranične strujne petlje sa stranicom $a = 10 \text{ cm}$ je s Hallovom sondom izmjerena magnetska indukcija $B = 1,8 \text{ mT}$. Kolika struja teče u petlji?

$$I = \underline{\hspace{2cm}} \text{ A}$$

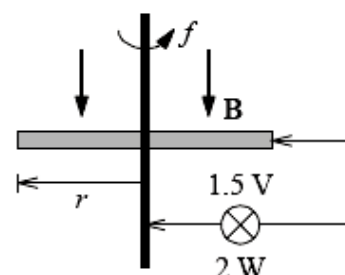


2.) U homogenom magnetskom polju indukcije $B = 200 \text{ mT}$ leži u stabilnom položaju kružna petlja promjera $d = 50 \text{ cm}$, kojom teče struja $I = 30 \text{ A}$. Koliki rad obavi vanjska sila koja petlju zavrti za 180° ?

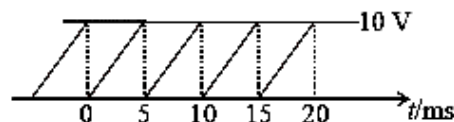
$$A = \underline{\hspace{2cm}} \text{ J}$$

3.) Os rotirajućeg bakrenog diska polumjera $r = 20 \text{ cm}$ se poklapa s smjerom homogenog magnetskog polja indukcije $B = 200 \text{ mT}$. S kolikim brojem okretaja u minuti mora rotirati bakreni disk da bi žaruljica bila pravilno napajana?

$$n = \underline{\hspace{2cm}} \frac{\text{0}}{\text{min}}$$



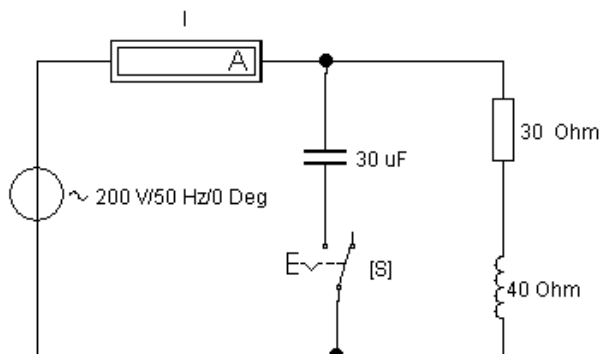
4.) Potrebno je izračunati faktor oblika pilastog napona na slici



$$k_0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

5.) Potrebno je izračunati za koliko ampera se promijeni pokazivanje A-metra u spoju na slici, ako zatvorimo sklopku S.

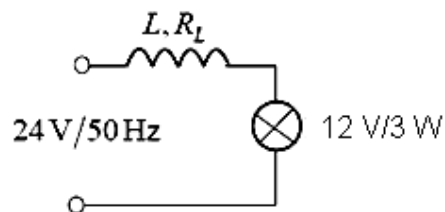
$$\Delta I = \underline{\hspace{2cm}} \text{ A}$$



PRIMJER PISMENOG ISPITA 11

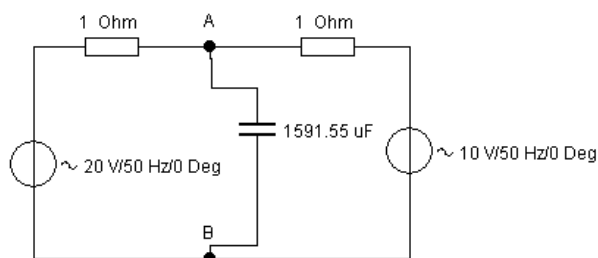
1.) Serijski s žaruljicom priključimo zavojnicu induktiviteta L i omskog otpora $R_L = 2 \Omega$. Koliki mora biti induktivitet zavojnice da napon i snaga žaruljice budu jednaki nazivnim vrijednostima?

$$L = \text{_____} \text{ mH}$$



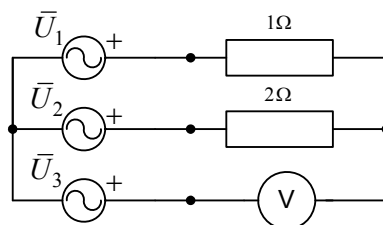
2.) Potrebno je izračunati apsolutni iznos napona \bar{U}_{AB} u mreži na slici

$$U_{AB} = \text{_____} \text{ V}$$



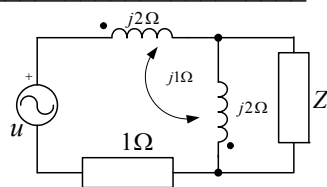
3.) Spoj na slici je napajan trofaznim simetričnim direktnim sustavom faznog napona 220 V. Potrebno je izračunati pokazivanje idealnog V-metra.

$$U_V = \text{_____} \text{ V}$$



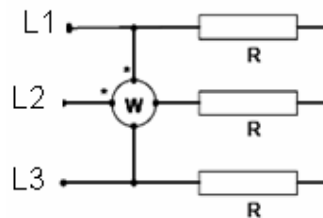
4.) Pri kojoj će kompleksnoj vrijednosti impedancije Z_t u spoju na slici snaga na njoj biti maksimalna?

$$Z_t = \text{_____} \Omega$$



5.) Treba odrediti pokazivanje W-metra.

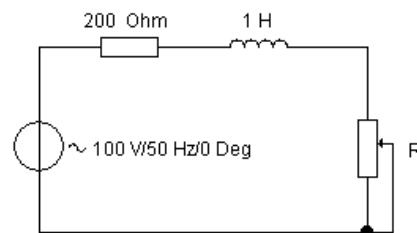
$$P_W = \text{_____} \text{ W}$$



PRIMJER PISMENOG ISPITA 12

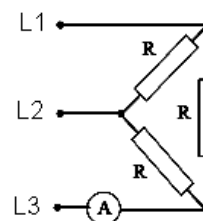
1.) Treba odrediti maksimalnu snagu koja se može pojaviti na promjenljivom otporniku R u spoju na slici.

$$P_{\max} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ W}$$



2.) Pokazivanje A-metra u spoju na slici je 30 A. Koliki je fazni napon koji napaja taj spoj, ako je $R = 10 \Omega$?

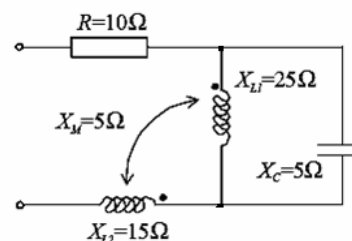
$$U_f = \underline{\hspace{2cm}} \text{ V}$$



3.) Potrebno je izračunati snagu otpornika u spoju na slici, ako je spoj priključen na izvor napona

$$\bar{U} = 11,18 \text{ V} \angle 26,565^\circ$$

$$P_R = \underline{\hspace{2cm}} \text{ W}$$

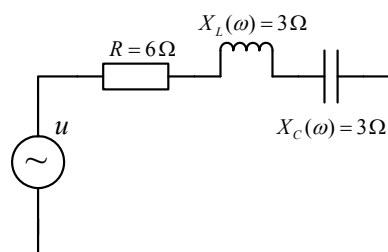


4.) Na primar idealnog transformatora spojen je izvor napona $U = 20 \text{ V}$ i unutarnjeg otpora $R_u = 20 \Omega$. Otpornik koji se priključuje na sekundar ima otpor $R_2 = 0,2 \Omega$. Koliki prijenosni omjer mora imati taj transformator da bi snaga na sekundarnom otporniku bila maksimalna? Koliko iznosi ta snaga?

$$n = \underline{\hspace{2cm}} \quad P_{\max} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ W}$$

5.) Potrebno je izračunati efektivnu vrijednost struje u spoju na slici, ako je $u = 10 + 10\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t) + 10\sqrt{2} \cdot \sin(3\omega t)$

$$I_{ef} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ A}$$



RJEŠENJA PISMENIH ISPITA

Primjer 1

- 1.) $\frac{E_{zr2} - E_{zr1}}{E_{zr1}} \cdot 100 = -60\%$
- 2.) $Q_2 = 30 \mu\text{C}$
- 3.) $P_I = 90 \text{ W}$
- 4.) $R_x = 79,63 \Omega$
- 5.) $I' = 18 \text{ A}; \quad I'' = 2 \text{ A}$

Primjer 2

- 1.) $R = 13,04 \Omega$
- 2.) $R_1 = 22 \Omega; \quad R_2 = 22 \Omega; \quad R_3 = 44 \Omega$
- 3.) $\Delta U_v = 44 \text{ V}$
- 4.) $Z_{ul} = 0,25 + j1,75 \Omega$
- 5.) $I = 0,65 \text{ A}$

Primjer 3

- 1.) $U = 250 \text{ V}$
- 2.) $E_1 = 16,67 \left(\frac{\text{kV}}{\text{m}} \right); \quad E_2 = 2,67 \left(\frac{\text{kV}}{\text{m}} \right); \quad \frac{E_2}{E_1} = 0,16$
- 3.) $I = 15 \text{ A}; \quad P_I = 1350 \text{ W}$
- 4.) $R' = 5,83 \Omega; \quad R'' = 0,17 \Omega$
- 5.) $R_x = 8 \Omega$

Primjer 4

- 1.) $\vec{F}_4 = (27 \cdot \vec{i} - 9 \cdot \vec{j}) \cdot 10^{-3} \left(\frac{\text{N}}{\text{m}} \right)$
- 2.) $t = 0,1432 \text{ s}$
- 3.) $P_R = 5,83 \text{ W}$
- 4.) $P_R = 39,3 \text{ W}$
- 5.) $f_0 = 137,832 \text{ kHz}$

Primjer 5

- 1.) $L = 94,9 \text{ mH}$
- 2.) $U_{AB} = 14,55 \text{ V}$
- 3.) $U_V = 330 \text{ V}$
- 4.) $Z_t = 0,2 - j1,6 \Omega$
- 5.) $I_{ef} \approx 5 \text{ A}$

Primjer 6

- 1.) $I = 78,76 \text{ mA}$
- 2.) $t = 0,1432 \text{ s}$
- 3.) $P_R = 5,83 \text{ W}$
- 4.) $P_R = 19,6593 \text{ W}$
- 5.) $f = 79,58 \text{ kHz}$

Primjer 7

- 1.) $\frac{E_A}{E_B} = \frac{1}{8}$
- 2.) $U_2 = 26,67 \text{ V}$
- 3.) $P_{izv} = 360 \text{ W}$
- 4.) $I = 37,1 \text{ A}; \quad P = 472 \text{ W}$
- 5.) $R_x = 4 \Omega$

Primjer 8

- 1.) $U_{AB} = -94,14 \text{ mV} \quad \frac{E_B}{E_A} = 5,8$
- 2.) $C_2 = 3 \mu\text{F}$
- 3.) $P_{izv} = 90 \text{ W}$
- 4.) $I = 37,1 \text{ A}; \quad P = 472 \text{ W}$
- 5.) $R_x = 6 \Omega; \quad P_{pot} = 9 \text{ W}$

Primjer 9

- 1.) $E = 599 \mu\text{V}$
- 2.) $u_c = 0,54 \text{ V}$
- 3.) $T_0 = 250 \mu\text{s}$
- 4.) $I = 0 \text{ A}$
- 5.) $P_R = 144 \text{ W}$

Primjer 10

- 1.) $I = 100 \text{ A}$
- 2.) $A = 2,356 \text{ J}$
- 3.) $n = 3581 \text{ }^\circ/\text{min}$
- 4.) $k_0 = 1,15$
- 5.) $\Delta I = 1,26 \text{ A}$

Primjer 11

- 1.) $L = 261 \text{ mH}$
- 2.) $U_{AB} = 14,55 \text{ V}$
- 3.) $U_V = 336 \text{ V}$
- 4.) $Z_t = 0,2 - j1,6 \Omega$
- 5.) $P_W = 0 \text{ W}$

Primjer 12

- 1.) $P_{\max} = 8,72 \text{ W}$
- 2.) $U_f = 100 \text{ V}$
- 3.) $P_R = 10 \text{ W}$
- 4.) $n = 10 \quad P_{\max} = 5 \text{ W}$
- 5.) $I_{ef} = 1,94 \text{ A}$

Popis oznaka korištenih u zbirci zadataka

| | |
|-----------------|--|
| Q | točkasti naboj |
| λ | linijski naboj |
| ε_0 | apsolutna dielektrična konstanta |
| ε_r | relativna dielektrična konstanta |
| σ | plošna gustoća naboja |
| F | sila na naboj |
| E | jakost električnog polja |
| ρ | volumna gustoća naboja |
| D | vektor gustoće električnog pomaka |
| P | polarizacijski vektor |
| S | površina |
| l | duljina |
| V | volumen |
| Ψ | električni tok |
| W | električna energija |
| A | rad u električnom polju |
| U | napon |
| U_{12} | napon između točaka 1 i 2 |
| C | kapacitet |
| R | električni otpor |
| G | električna vodljivost |
| ρ | specifični električni otpor (električna otpornost) |
| χ | specifična električna vodljivost (el.provodnost) |
| I | jakost električne struje |
| P | električna snaga |
| μ_0 | magnetska permeabilnost vakuumu |
| μ_r | relativna magnetska permeabilnost |
| μ | magnetska permeabilnost |
| B | magnetska indukcija |
| ϕ | magnetski tok |
| H | jakost magnetskog polja |
| N | broj zavoja |
| Ψ | ulančani magnetski tok |
| v | brzina |
| ω | kutna brzina |
| L | induktivitet |
| M | međuinuktivitet |
| k | faktor magnetske sprege |
| τ | vremenska konstanta |
| i | trenutna vrijednost struje |
| I_{\max} | maksimalna vrijednost struje |

I_{ef} efektivna vrijedost struje
 I_{sr} srednja elektrolitička vrijedost struje
 I'_{sr} srednja aritmetička vrijednost
 I apsolutni iznos struje (efektivna vrijednost)
 \bar{I} fazor struje I
 t vrijeme
 T perioda promjenljive veličine
 ω kružna frekvencija
 f frekvencija
 φ fazni kut između napona i struje
 β_U početni kut fazora napona
 β_I početni kut fazora struje
 X_L induktivni otpor
 X_C kapacitivni otpor
 Z kompleksna impedancija
 $|Z|$ apsolutni iznos impedancije
 Y kompleksna admitancija
 $|Y|$ apsolutni iznos admitancije
 $p(t)$ trenutna snaga
 P djelatna snaga
 Q jalova snaga
 S prividna snaga
 $\cos \varphi$ faktor snage (faktor faznog pomaka)
 a kompleksni operator rotacije za 120°
 a^2 kompleksni operator rotacije za 240°

Korištena literatura

- [1.] Branislav Kuzmanović: Osnove elektrotehnike I i II Zagreb ELEMENT, 2000.
- [2.] Armin Pavić-Ivan Felja: Osnove elektrotehnike 1-Auditorne vježbe
- [3.] Gordan Đurović: Elektrotehnika I i II-Zbirka zadataka, Zagreb, 2004.
- [4.] Viktor Kranjc: Zbirka rešenih nalog iz Osnov elektrotehnike I i II, Univerza v Mariboru, 2002.
- [5.] Raymond A. DeCarlo, Pen-Min Lin: Linear Circuit Analysis, 2nd Editon
Oxford University Press, New York, 2001.

Korišteni Internet materijali

http://www.oss.unist.hr/studiji/it/materijali/Zbirke/OEI_Zbirka_Zadataka_2006.pdf

http://stari.ltfe.org/oe/1kol_oe1.asp

http://stari.ltfe.org/oe/2kol_oe2.asp

Korišten aplikativni softver:

Electronics Workbench 5.1

MATLAB 6.5

GRAPHMATICA 2.0e